

確率システムシンポジウム50回記念特集*

(令和2年1月15日 公開)

目 次

(* 企画編集/管理：確率システムシンポジウム組織委員会)

解説

Estimation and Control of Distributed Parameter Systems	Akira Ichikawa	1
信号推定のための観測の理論 —イノベーション, 最適伝送, 観測機構の最適化—	武内良樹	7
身近な移動体への非線形カルマンフィルタの実応用 —距離センサの利用—	田中雅博	15
確率可積分系試論	赤堀次郎	27
確率リャプノフ安定論—ノイズが導く多様な安定性	西村悠樹	34
Kalman Filter and Nonlinear Filters for Space Navigation	Masaya Murata	40
実問題への適用に向けたロバストフィルタ	石原新士	46
SSS50回記念「思い出 — 回想」 随想集 および SSS に関連する受賞者・受賞論文名		53

[確率システムシンポジウム 50 回記念**]

解 説

Estimation and Control of Distributed Parameter Systems

Akira ICHIKAWA*

1. Introduction

The semigroup model in a Hilbert space can describe a wide class of distributed parameter systems such as partial differential equations and functional differential equations and is useful to formulate estimation and optimal control problems.

2. Mathematical Preliminaries

In this section the definition of a strongly continuous semigroup and its generator are reviewed. Then the stochastic integration with respect to an orthogonal increments process and a linear estimation problem are briefly reviewed.

2.1 Semigroup of bounded operators

Let H and K be Hilbert spaces with inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and norm $|\cdot|$ respectively. Let $L(H, K)$ be the space of bounded linear operators mapping H into K . $L(H, H)$ will be simply denoted by $L(H)$.

[Definition 1] $S(t) \in L(H)$, $t \geq 0$ is a strongly continuous semigroup Refs. [2,3,5,10] if it satisfies the following:

- (i) $S(0) = I$, the identity operator,
- (ii) $S(t)S(s) = S(t+s)$ for all $t, s \geq 0$,
- (iii) $S(t)x$ is continuous for all $x \in H$.

[Definition 2] The infinitesimal generator of a semigroup $S(t)$ is defined by

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}$$

when the limit exists, and its domain is denoted by $D(A)$.

The resolvent set of A is the set of complex numbers λ such that $\lambda I - A$ is one to one and onto H and is denoted by $\rho(A)$. The inverse $(\lambda I - A)^{-1}$ is called the resolvent of A and is denoted by $R(\lambda, A)$. The limit

$$\omega_0 = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{|S(t)|}{t}$$

exists and is called the type of the semigroup. Moreover, for each $\omega > \omega_0$ there exists a number M such that $|S(t)| \leq M \exp \omega t$. The graph of A is the set $\{(x, Ax), x \in D(A)\}$ and is a closed set in $H \times H$. If $x \in D(A)$ then $S(t)x \in D(A)$ and $\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$. The following result is known as Hill-Yosida theorem.

[Theorem 1] Let A be a closed operator with domain $D(A)$. Then A is the infinitesimal generator of a semigroup if and only if there exist real numbers M and ω such that the following conditions hold:

- (i) The closure of $D(A)$ is the whole space H ,
- (ii) $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ and for $\lambda > \omega$

$$|R(\lambda, A)|^k \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Moreover,

$$S(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(A_n t)x, \quad x \in H,$$

$$|S(t)| \leq M \exp(\omega t),$$

where $A_n = nAR(n, A)$.

A_n is a bounded operator and is known as the Yosida approximation of A and has properties

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nR(n, A)x = x, \quad x \in H,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax, \quad x \in D(A).$$

[Example 1] Consider the heat equation

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t, s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} x(t, s), \quad 0 < s < 1,$$

$$x(t, 0) = x(t, 1) = 0,$$

$$x(0, s) = x_0(s).$$

For this example set $H = L_2(0, 1)$, $Ax = \frac{d^2 x(s)}{ds^2}$ and

$$D(A) = \{x \in L_2(0, 1) : \frac{dx}{ds}, \frac{d^2 x}{ds^2} \in L_2(0, 1),$$

$$x(0) = x(1) = 0\}.$$

Moreover,

$$S(t)x = \sum_{i=1}^{\infty} 2 \exp(-\pi^2 i^2 t) \sin i \pi s \int_0^1 \sin(i \pi r) x(r) dr.$$

The type of this semigroup is $\omega_0 = -\pi^2$ and $M = 1$. The resolvent operator is given by

$$R(\lambda, A)x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda + i^2 \pi^2} \sin i \pi s \int_0^1 \sin(i \pi r) x(r) dr.$$

[Example 2] Consider the delay equation Refs. [2, 3]

$$\dot{x} = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau),$$

$$x(0) = x_0,$$

$$x(s) = x_0(s), \quad -\tau \leq s < 0,$$

* Kyoto University

Key Words: estimation, control, distributed parameter systems

where $x_0(s) \in L_2(-\tau, 0; R^n)$. Taking the state $(x(t), x(t+s))$ in $R^n \times L_2(-\tau, 0; R^n) = M_2(-\tau, 0; R^n)$, this equation can be described by the generator

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ x(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 x_0 + A_1 x(-\tau) \\ \frac{dx(s)}{ds} \end{pmatrix}$$

with domain

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x(s) \end{pmatrix} \in M_2(-\tau, 0; R^n) : \frac{dx(s)}{ds} \in L_2(-\tau, 0; R^n), x_0 = x(0) \right\}.$$

Consider the differential equation in H

$$\dot{x} = Ax + f(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

where f is locally integrable. Then

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-r)f(r)dr \quad (2)$$

is well-defined and is continuous. It is called the mild solution. However it is not differentiable in general. If $x_0 \in D(A)$ and f is differentiable, the mild solution is differentiable and satisfies (1). In this case it is called a strict solution Refs. [3,5].

Consider the perturbed equation

$$\dot{x} = [A + A_1(t)]x, \quad x(s) = x_0 \quad (3)$$

where $A_1 \in L(H)$ is a strongly continuous operator. The integral form of this equation is

$$x(t) = S(t-s)x_0 + \int_s^t S(t-r)A_1(r)x(r)dr$$

and has a unique solution. It is a linear function of the initial condition x_0 and is written in the form $x(t) = S(t,s)x_0$. $S(t,s)$ is called the mild evolution operator Ref. [2] generated by $A + A_1(t)$ and satisfies

$$S(t,s)x_0 = S(t-s)x_0 + \int_s^t S(t-r)A_1(r)S(r,s)x_0dr.$$

The differential form of this equation is

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t,s)x_0 = [A + A_1(t)]S(t,s)x_0, \quad S(s,s) = I.$$

2.2 Wiener integral and linear estimation

First recall some basic definitions from Ref. [6]. Let (Ω, F, P) be a complete probability space. Square integrable random vectors x and y are said to be orthogonal, $x \perp y$, if $E(x^T y) = 0$, where E denotes expectation and x^T is the transpose of x . An n -dimensional stochastic process $w(t)$ is an orthogonal increments process if for any non-overlapping intervals (s, t) and (s', t') , $[w(t) - w(s)] \perp [w(t') - w(s')]$. An n -dimensional process $w(t)$ is a standard Wiener process if (i) $w(0) = 0$, (ii) $w(t)$ has continuous sam-

ple paths, (iii) $w(t)$ has independent increments and (iv) $w(t)$ is Gaussian with covariance tI_n , where I_n is the identity matrix. Now define the integral with respect to an orthogonal increments process. Let $F_t, 0 \leq t \leq T$ be an increasing family of σ -subfield of F . Assume that $w(t)$ be F_t -measurable and that $w(t+s) - w(t)$, $s \geq 0$ is independent of F_t . Let $B \in L_2((0, T) \times \Omega; R^{m \times n})$ such that $B(t)$ is F_t measurable. $B(t)$ is called an elementary process if there exists a sequence $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ such that

$$B(t) = B_q, \quad t \in (t_q, t_{q+1}]$$

where B_q is F_{t_q} -measurable. The integral of B with respect to $w(t)$ is defined by

$$I(B) = \sum_{q=0}^{p-1} B_q [w(t_{q+1}) - w(t_q)].$$

Then

$$E|I(B)|^2 = \int_0^T E \text{tr} B^*(t) B(t) dt,$$

where tr denotes the trace of a matrix. The integral can be extended to the F_t -adapted whole space $L_2((0, T) \times \Omega; R^{m \times n})$ and is called Ito-integral. If B is non-random, it is called Wiener integral. The Ito-integral can be extended $L(R^m, X)$ -valued B where X is a separable Hilbert space.

Let $H(X) = L_2(\Omega, F, P; X)$ be the space of square integrable random variables in X and $H_0(X) = \{x \in H(X); Ex = 0\}$. Let $\{y(t), 0 \leq t \leq T\}$ be an m -dimensional quadratic mean continuous process and define

$$H_t^{y,1}(X) = L_X \{1, y(s), 0 \leq s \leq t\},$$

the closure in $H(X)$ of all linear combinations of 1 and $y_j(s_i)$, $0 \leq s_i \leq t$, where y_j is the j -th component of y . For a given $x \in H(X)$ the projection of x onto $H_t^{y,1}(X)$ denoted by $P_t x$ is called the best affine estimator of x given $\{y(s), 0 \leq s \leq t\}$. Let $x_c = x - Ex$ and $y_c(t) = y(t) - Ey(t)$. Define $H_t^{y_c}(X) = L_X \{y_c(s), 0 \leq s \leq t\}$. Let P_t^0 be the projection of $H_0(X)$ onto $H_t^{y_c}(X)$. Then $P_t^0 x_c$ is called the best linear estimator of x_c given $\{y_c(s), 0 \leq s \leq t\}$.

Assume further that $y(t)$ is an orthogonal increments process with $y(0) = 0$, $Ey(t) = 0$ and $\text{Cov}(y(t)) = tI_m$. Then the following results hold.

[**Proposition 1**] Let X^m be an m -vector whose components are in X . Then

$$H_t^y(X) = \left\{ \int_0^t k(s) dy(s) : k \in L_2(0, t; X^m) \right\}$$

where $ky = \sum_i k_i y_i$ for $y \in R^m$.

[**Proposition 2**] Let $x(t)$ be a quadratic mean continuous process in X with $x(t) = 0$. Then the statements below are equivalent.

- (i) $x(t) \in H_t^y(X)$ and for $s \leq t$, $x(t) - x(s) \perp H_s^y(X)$.
- (ii) There exists a $k \in L_2(0, T; X^m)$ such that

$$x(t) = \int_0^t k(s)dy(s).$$

Proofs in the case $X = R^1$ are given in Ref. [6] and can be extended to the present case.

Let H, K be any Hilbert spaces. For any $x \in H$, $y, z \in K$ define $x \otimes y \in L(K, H)$ by $x \otimes y(z) = x \langle y, z \rangle$. Let $x \in H(X)$. The covariance of x is denoted by $\text{Cov}(x) = E(x - Ex) \otimes (x - Ex)$. It is a trace class operator Ref. [5] and

$$E|x - Ex|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, \text{Cov}(x)e_i \rangle = \text{tr. Cov}(x)$$

for an orthonormal sequence e_i . For $k, h \in X^m$, define $\langle k, h \rangle = \sum_i k_i h_i$. For $x \in X$, $y \in R^m$, $x \otimes y \in L(R^m, X)$ can be identified as the element $(xy_i) \in X^m$.

[Theorem 2] Let $x \in H_0(X)$ and let $\hat{x}(t)$ be the projection of x onto $H_t^y(X)$. Then

$$\hat{x}(t) = \int_0^t \frac{d}{ds} E[x \otimes y(s)] dy(s).$$

This theorem follows from two propositions above. In fact

$$\hat{x}(t) = \int_0^t k(s)dy(s) \text{ for some } k \in L_2(0, T; X^m).$$

$$E \langle x - \hat{x}(t), \int_0^t h(s)dy(s) \rangle = 0$$

for any $h \in L_2(0, T; X^m)$. Hence

$$\begin{aligned} & E \langle x, \int_0^t h(s)dy(s) \rangle \\ &= E \langle \int_0^t k(s)dy(s), \int_0^t h(s)dy(s) \rangle \\ &= \int_0^t \langle k(s), h(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Now choose a constant $h(s) = h_0$. Then

$$\begin{aligned} E \langle x, h_0 y(t) \rangle &= E \langle h_0, x \otimes y(t) \rangle \\ &= \int_0^t \langle h_0, k(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Hence

$$\frac{d}{dt} E[x \otimes y(t)] = k(t).$$

Let $z(t)$ be an m -dimensional quadratic mean continuous process such that for any $t > s$, $w(t) - w(s)$ is orthogonal to $H_s^{w,z}$. Define

$$y(t) = \int_0^t z(s)ds + \int_0^t Ddw(s).$$

Let $\hat{z}(t)$ be the projection of $z(t)$ onto $H_t^y(R^m)$ and consider the innovations process

$$\nu(t) = y(t) - \int_0^t \hat{z}(s)ds.$$

The following results are useful for linear estimation Ref. [6].

[Theorem 3] (i) For all s and $t > s$,

$$\nu(t) - \nu(s) \perp H_s^y(R^n).$$

(ii) ν has orthogonal increments and $\text{Cov}(\nu(t)) = tDD^*$.

(iii) If DD^* is positive, $H_t^y(X) = H_t^{\nu}(X)$.

3. Optimal Control Problem

Let $X, Z_i, i=1,2$ and U be separable Hilbert spaces with inner products denoted by $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Consider the system

$$dx = Axdt + B_1dw + B_2udt, \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

$$z = C_1x + D_{12}u \in Z_1, \quad (5)$$

$$z_T = C_Tx(T) \in Z_2, \quad (6)$$

$$dy = C_2xdt + D_{21}dw, \quad y(0) = 0, \quad (7)$$

where A is the infinitesimal generator of a strongly continuous semigroup $S(t)$ in X , $D(A)$ its domain, $u \in U$ is a control input, w is a standard n -dimensional Wiener process given in the probability space (Ω, F, P) , $y \in R^m$ is an observation and other operators are bounded linear operators defined on the appropriate spaces. For example $B_2 \in L(U, X)$, the bounded linear operator from U to X . Assume the following

$$C_1^*D_{12} = 0, \quad D_{12}^*D_{12} = I, \quad (8)$$

$$B_1D_{21}^* = 0, \quad D_{21}D_{21}^* = I_m, \quad (9)$$

where $*$ denotes the adjoint operator and I the identity operator on U . The purpose of the control is to minimize the following quadratic function

$$J(u) = E|z_T|^2 + E \int_0^T |z(t)|^2 dt, \quad (10)$$

where E denotes the expectation. Admissible controls are linear functions of the observation y . As preliminaries consider the deterministic optimal regulator problem and the filtering problem separately.

4. Optimal Regulator

Consider the system

$$\dot{x} = Ax + B_2u, \quad x(0) = x_0 \in X \quad (11)$$

and the cost function

$$J(u) = |z_T|^2 + \int_0^T |z(t)|^2 dt, \quad (12)$$

which is to be minimized over the set $L_2(0, T; U)$ of square integrable functions. The state of the system (11) is given by the mild solution

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-r)B_2u(s)ds.$$

The operator-valued equation

$$\begin{aligned} -\dot{Q} &= A^*Q + QA + C_1^*C_1 - QB_2^*B_2Q, \\ Q(T) &= C_T^*C_T \end{aligned} \quad (13)$$

is called the Riccati equation and plays the main role for this optimization problem. It is interpreted in the mild sense as

$$\begin{aligned} Q(t)x &= S^*(T-t)Q(T)S(T-t)x \\ &+ \int_t^T S^*(r-t)[C_1^*C_1 - Q(r)B_2^*B_2Q(r)]S(r-t)xdr. \end{aligned}$$

This equation has a unique non-negative solution for all $T > 0$. In fact it is locally Lipschitz and has a unique non-negative solution for a sufficiently small T . If $Q(t)$ is a solution, then it satisfies (13) in the inner product sense

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \langle x, Qy \rangle &= \langle Ax, Qy \rangle + \langle Qx, Ay \rangle \\ &+ \langle C_1x, C_1y \rangle - \langle x, QB_2^*B_2Qy \rangle \end{aligned}$$

for any $x, y \in D(A)$. If $x(t)$ is differentiable and lies in $D(A)$, then

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x(t), Q(t)x(t) \rangle &= |z(t)|^2 \\ &+ |u(t) + B_2^*Q(t)x(t)|^2, \end{aligned}$$

where $|\cdot|$ denotes the norm in the Hilbert spaces. By integration

$$J(u) = \langle x_0, Q(0)x_0 \rangle + \int_0^T |u(t) + B_2^*Q(t)x(t)|^2 dt.$$

The final equation does not contain the generator A and can be justified for the mild solution using differentiable approximations of the system (11) Refs. [5, 7, 8]. Hence the minimum of $J(u)$ is attained by the feedback $u_{op} = -B_2^*Qx$ and $J(u_{op}) = \langle x_0, Q(0)x_0 \rangle$. This implies that the solution $Q(t)$ is non-negative and a priori bounded. Hence the Riccati equation has a solution for any finite T . The optimal control exists for any finite T and is given by the feedback u_{op} . This is realizable when the state is available to the controller.

The feedback u_{op} is also optimal for the stochastic regulator problem defined by (4) and (10). Assume that $x_0 \in H(X)$ is independent of $w(t)$ and the set of admissible controls is $L_2((0, T) \times \Omega; U)$ such that $u(t)$ is F_t measurable. The mild solution of (4) is defined as

$$\begin{aligned} x(t) &= S(t)x_0 + \int_0^t S(t-r)B_1dw(r) \\ &+ \int_0^t S(t-r)B_2u(s)ds. \end{aligned}$$

Assume that $x(t)$ is a solution of (4). Then Ito's formula Refs. [5, 7, 8] applied to $v(t, x) = \langle Q(t)x, x \rangle$ yields

$$\begin{aligned} dv(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t}v(t, x)dt + \frac{\partial}{\partial x}v(t, x)dx \\ &+ \frac{1}{2} \text{tr}.B_1^* \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t, x)B_1dt \\ &= [|z(t)|^2 + |u(t) + B_2^*Q(t)x(t)|^2 + \text{tr}.B_1^*Q(t)B_1]dt \\ &+ 2 \langle Q(t)x(t), B_1dw \rangle. \end{aligned}$$

The expectation of the Ito-integral is zero and

$$\int_0^T \langle Q(t)x(t), B_1dw \rangle = 0.$$

By integration and then taking expectation

$$\begin{aligned} J(u) &= E \int_0^T |u(t) + B_2^*Q(t)x(t)|^2 dt \\ &+ \int_0^T \text{tr}.B_1^*Q(t)B_1dt + E \langle x_0, Q(0)x_0 \rangle. \end{aligned}$$

This formula for the mild solution can be justified using approximating systems of (4) Refs. [7, 8] which have Ito differentials. Hence the minimum is attained by the same feedback control $u_{op} = -B_2^*Qx$ and

$$\begin{aligned} J(u_{op}) &= E \langle \bar{x}_0, Q(0)\bar{x}_0 \rangle + \text{tr}.P_0Q(0) \\ &+ \int_0^T \text{tr}.B_1^*Q(t)B_1dt, \end{aligned}$$

where \bar{x}_0 is the mean of x_0 and P_0 the covariance. This control is realizable when the complete observation of the state is available.

5. Filtering Problem

Now consider

$$dx = Axdt + B_1dw, \quad x(0) = x_0, \quad (14)$$

$$dy = C_2xdt + D_{21}dw, \quad y(0) = 0, \quad (15)$$

where $x_0 \in H(X)$ and $w(t)$ is an orthogonal increments process with $w(0) = 0$, $E(w(t)) = 0$ and $\text{Cov}(w(t)) = tI_m$. Assume that x_0 and $w(t)$ are independent. The solution of (14) is interpreted in the mild sense

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)B_1dw(s).$$

The observation process

$$y(t) = \int_0^t C_2x(s)ds + D_{21}w(t)$$

is quadratic mean continuous. The filtering problem is to find the best affine estimator $\hat{x}(t)$ of the state $x(t)$ given $\{y(s), 0 \leq s \leq t\}$. In this case the innovations process is given by

$$\eta(t) = y(t) - \int_0^t C_2\hat{x}(s)ds.$$

Note that $H_t^y(X) = H_t^\eta(X)$.

[**Theorem 4**] The best estimator is given by

$$\hat{x}(t) = \int_0^t S(t-s)P(s)C_2^*d\eta(s) + S(t)\bar{x}_0, \quad (16)$$

where $P(t)$ is the covariance of the error $x(t) - \hat{x}(t)$ and is the mild solution of the Riccati equation

$$\dot{P} = AP + PA^* + B_1 B_1^* - P C_2^* C_2 P, \quad P(0) = P_0.$$

Moreover,

$$\hat{x}(t) = \int_0^t S(t,s) P(s) C_2^* dy(s) + S(t,0) \bar{x}_0,$$

where $S(t,s)$ is the mild evolution operator given by

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t,s) = AS(t,s) - P(t) C_2^* C_2 S(t,s).$$

Assume $x_0 = 0$ and derive (16). By Theorem 2

$$\hat{x}(t) = \int_0^t \frac{d}{ds} [x(t) \otimes \eta(s)] d\eta(s).$$

Now

$$\begin{aligned} E[x(t) \otimes \eta(s)] &= E[x(t) \otimes \int_0^s C_2 [x(r) - \hat{x}(r)] dr \\ &\quad + D_{12} w(s)] \\ &= \int_0^s E[x(t) \otimes C_2 [x(r) - \hat{x}(r)]] dr \\ &= \int_0^s E[S(t-r)x(r) + \int_r^t S(t-r) B_1 dw(r)] \\ &\quad \otimes C_2 [x(r) - \hat{x}(r)] dr \\ &= \int_0^s S(t-r) P(r) C_2^* dr, \end{aligned}$$

where (8) and the property $\hat{x}(t) \perp x(t) - \hat{x}(t)$ are used. Hence

$$\frac{d}{ds} E[x(t) \otimes \eta(s)](t) = S(t-s) P(s) C_2^*,$$

and

$$\hat{x}(t) = \int_0^t S(t-s) P(s) C_2^* d\eta(s),$$

The error process $e = x - \hat{x}$ is given by

$$\begin{aligned} e(t) &= S(t)(x_0 - \bar{x}_0) \\ &\quad + \int_0^t S(t-s) B_1 dw(s) \\ &\quad + \int_0^t S(t-s) P(s) C_2^* d\eta(s), \end{aligned}$$

and its covariance is given by

$$\begin{aligned} P(t) &= S(t) P_0 S^*(t) \\ &\quad + \int_0^t S(t-r) B_1 B_1^* S^*(t-r) dr \\ &\quad + \int_0^t S(t-r) P(r) C_2^* C_2 P(r) S^*(t-r) dr. \end{aligned}$$

In terms of the observation process

$$\hat{x}(t) = \int_0^t S(t-s) P(s) C_2^* [dy(s) - C_2 \hat{x}(s) ds]$$

whose differential form is

$$d\hat{x}(t) = [A - P(t) C_2^* C_2] \hat{x}(t) dt + P(s) C_2^* dy(t).$$

This recursive scheme is known as Kalman filter.

6. Optimal Control Under Partial Observation

Consider the optimization problem (4)-(10). Admissible controls are linear feedback of the form

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t f(t,r) dy(r) + u_0(t), \\ f &\in L(R^n, U), \quad u_0 \in L_2(0, T; U), \\ &\int_0^T \int_0^t |f(t,r)|^2 dr dt < \infty. \end{aligned}$$

This control has property Ref. [6]

$$u(t) \in H_t^{\eta,1} \text{ a.e. on } [0, T].$$

Let $x_0(t)$ be the state of (14) so that

$$x_0(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s) B_1 dw(s).$$

Then

$$x(t) = x_0(t) + \int_0^t S(t-s) B_2 u(s) ds.$$

Define

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{x}_0(t) + \int_0^t S(t-s) B_2 u(s) ds \\ &= S(t) \bar{x}_0 + \int_0^t S(t-s) P(s) C_2^* d\eta(s) \\ &\quad + \int_0^t S(t-s) B_2 u(s) ds. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - \hat{x}(t) = x_0(t) - \hat{x}_0(t), \\ \eta(t) &= y(t) - \int_0^t C_2 \hat{x}(s) ds. \end{aligned}$$

The cost function can be written as

$$\begin{aligned} J(u) &= \hat{J}(u) + tr. C_T P(T) C_T^* + \int_0^T tr. C_1 P(t) C_1^*, \\ \hat{J}(u) &= E|\hat{z}_T|^2 + E \int_0^T |\hat{z}(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

where $\hat{J}(u)$ is the cost function for the process $\hat{x}(t)$. Consider the minimization of $\hat{J}(u)$ over the set \hat{U}_{ad} of admissible controls, where

$$\hat{U}_{ad} = \{u \in L_2((0, T) \times \Omega; U) : u(t) \in H_t^{\eta,1} \text{ a.e. on } [0, T]\}.$$

The differential form of \hat{x} is

$$d\hat{x} = (A\hat{x} + B_2 u) dt + P(t) C_2^* d\eta.$$

This is a stochastic regulator problem with time-varying B_1 . But the optimal control is still the feedback

$$u_{op}(t) = -B_2^*Q(t)\hat{x}(t)$$

where Q is the solution of the Riccati equation (13). The optimal response is the mild solution of

$$dx_{op} = [A - B_2B_2^*Q(t) - P(t)C_2^*C_2]x_{op}(t)dt + P(t)C_2^*dy,$$

$$x_{op}(0) = \bar{x}_0$$

and is given by

$$x_{op}(t) = \tilde{S}(t,0)\bar{x}_0 + \int_0^t \tilde{S}(t,r)P(r)C_2^*dy(r),$$

where $\tilde{S}(t,s)$ is the evolution operator generated by $A - B_2B_2^*Q(t) - P(t)C_2^*C_2$. Hence

$$u_{op}(t) = -B_2^*Q(t)[\tilde{S}(t,0)\bar{x}_0 + \int_0^t \tilde{S}(t,r)P(r)C_2^*dy(r)]$$

is a linear feedback control of the observation process and an admissible control of the original optimization problem. The optimal control is obtained separately solving the regulator problem and the Kalman filter and the result is known as the separation principle. Stochastic regulator for systems with state and control dependent noise can be found in Refs. [7,11] and for time-varying systems in Ref. [4]. Boundary or point control and observation can be described by unbounded operators B_2 and C_2 Ref. [9].

References

- [1] R. F. Curtain: Estimation and stochastic control for linear infinite dimensional systems, Probabilistic Analysis and Related Topics, Vol. 1, A. T. Bharucha-Reid (ed.), Academic Press, pp. 45-86 (1978).
- [2] R. F. Curtain and A. J. Pritchard: Infinite Dimensional Systems Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 8, Springer-Verlag, New York (1978).
- [3] R. F. Curtain and H. J. Zwart: An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory, Springer-Verlag, New York (1995).
- [4] G. Da Prato and A. Ichikawa: Quadratic control for linear time-varying systems, SIAM Journal of Control & Optimization, 28, pp. 359-381 (1990).
- [5] G. Da Prato and J. Zabczyk: Stochastic Equations

in Infinite Dimensions, Cambridge University Press (1992).

- [6] M. H. A. Davis: Linear Estimation and Stochastic Control, Chapman and Hall, London (1977).
- [7] A. Ichikawa: Dynamic programming approach to stochastic evolution equations, SIAM Journal of Control & Optimization, Vol. 17, pp. 152-174 (1979).
- [8] A. Ichikawa: Semilinear stochastic evolution equations: Boundedness, stability and invariant measures, Stochastics, Vol. 12, pp. 1-39 (1984).
- [9] A. Ichikawa: Filtering and control of stochastic differential equations with unbounded coefficients, Stochastic Analysis and Applications, Vol. 4, pp. 187-212 (1986).
- [10] A. Pazy: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York (1983).
- [11] W. M. Wonham: Random differential equations in control theory, Probabilistic Methods in Appl. Math., Vol. 2, A. T. Bharucha-Reid (ed.), Academic Press, New York, pp.131-212 (1970).

Authors

Akira Ichikawa



Dr. Akira Ichikawa received the BE degree in Aeronautics from the Tokyo University in 1970 and the Ph.D degree in Applied Mathematics from the State University of New York at Stony Brook in 1974. He was a Postdoctoral fellow in the Department of Mathematics at the University of British Columbia from 1974 to 1975 and a Senior Research fellow of the Control Theory Centre at the University of Warwick from 1975 to 1978. He was with the Faculty of Engineering, Shizuoka University as an Associate Professor in Applied Mathematics from 1978 to 1988 and as a Professor in Electrical Engineering from 1988 to 2004. He joined the Department of Aeronautics and Astronautics, Kyoto University in 2004 and the Department of Information Science and Engineering, Nanzan University in 2010. He is an Emeritus Professor of Shizuoka University and Kyoto University. His research interests lie in control theory and spacecraft formation flying.

「確率システムシンポジウム 50 回記念」

解 説

信号推定のための観測の理論
— イノベーション, 最適伝送, 観測機構の最適化—

武内 良樹*

1. はじめに

私が京都工芸繊維大学の砂原研究室に卒研生として配属されたのは, 1973 年春のことである。私はそれ以来継続して確率システムのフィルタリング理論に関する研究に取り組んできた。

実は, その間フィルタリング理論に関する研究を単に続けただけではなく, 常に自分の主要研究テーマに設定しており, 砂原研究室の多くの出身者の中でも, これだけ長期間にわたって研究の矛先を動かさずにやってきた者は多くはないと思う。昨年, SSS (ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications) がめでたく第 50 回を迎えたが, 私はそのほとんどに出席して研究発表を行ってきた。私自身, ちょうど昨年度末で大学の常勤職を退職したこともあり, 本稿で自分のこれまでの研究の自己レビューをまとめて, この分野の研究者の方々の参考としたいと思う。

私の研究の中心的なテーマは, もちろん年とともに変化してきた。確率システムのフィルタリング理論に関係するテーマを年代順に大雑把に書くと,

- 1) 線形ジャンプパラメータ系の状態推定 (1976 年～1980 年, [1]～[4])
- 2) 状態依存性雑音を伴う観測による状態推定 (観測データの分解定理) (1981 年～1985 年, [6]～[8])
- 3) イノベーション過程と観測データとの情報等価性 (1986 年～1991 年, [9]～[13],[18])
- 4) Gauss 並列通信路における確率過程の最適伝送 (1992 年～2006 年, [14]～[17],[20],[23],[24],[27])
- 5) 情報理論的な観点からの観測機構の最適化 (2000 年～2010 年, [21],[22],[25],[26],[28]～[30])
- 6) Kalman フィルターのための観測機構の最適化 (2010 年～, [31]～[40])

のようになると思われる。ただし, これら以外にも, 離散時間観測のもとでのフィルタリングの公式を導いた文献 [5] のような理論研究も行っている。

ここでは, すべてが大学院生時代の研究である 1) を除く 2)～6) を, これらを考える動機ともなった 3 つの周知の問題:

- a) イノベーションと観測の情報等価性
- b) 通信路エネルギー制約条件の下で相互情報量を最大にする伝送法
- c) Kalman フィルターのための観測機構の最適化と関連付けて説明したいと思う。

2. イノベーションと観測の情報等価性

2.1 1980 年代初頭当時における既知の結果

連続時間の観測モデル:

$$dy_t = h_t dt + dv_t, \quad y_0 = 0 \quad (1)$$

について, 観測過程のもつ情報 $\mathcal{Y}_t = \sigma\{y_s; 0 \leq s \leq t\}$ とイノベーション過程:

$$\tilde{v}_t \triangleq y_t - \int_0^t \hat{h}_s ds, \quad \hat{h}_t \triangleq E\{h_t | \mathcal{Y}_t\} \quad (2)$$

のもつ情報 $\tilde{\mathcal{V}}_t \triangleq \sigma\{\tilde{v}_s; 0 \leq s \leq t\}$ が等しいとき, 「イノベーションと観測の情報等価性が成り立つ」という。ただし, (1) 式において, h_t は, ある信号過程 $\mathbf{x} \equiv \{x_t; 0 \leq t < \infty\}$ について, x_t の関数 ($h_t = h(t, x_t)$) または $\{x_s; 0 \leq s \leq t\}$ の汎関数 ($h_t = h(t, x_s, s \leq t)$) であるものとする。また, $\mathbf{v} \equiv \{v_t; 0 \leq t < \infty\}$ は信号 \mathbf{x} とは独立な Brown 運動過程であるものとする。

定義からイノベーション過程は観測データから計算可能なものであるので, $\mathcal{Y}_t \supset \tilde{\mathcal{V}}_t$ は自明である。従って, この問題は逆の包含関係 $\mathcal{Y}_t \subset \tilde{\mathcal{V}}_t$ が成り立つ, すなわち, イノベーション過程から観測過程を再構成できるか否かを問うものである。

この問題は, イノベーション過程の命名者でもある Kailath が 1967 年に仮説 (conjecture) として提唱し, 彼の弟子 Frost とともに証明を試みたのが発端となっている。しかし, 彼らは信号の 2 乗可積分性の条件: $E\{\int_0^t |h_s|^2 ds\} < \infty$ のもとで, この情報等価性が成り立つことを示すことはできなかった。

また, 1970 年代には何人もの研究者からこの仮説の証明に成功したという内容の論文が提出された。しかし, これらのいずれも, 後に証明に間違いがあることが判明した。

さらに, 観測モデルが確率微分方程式で記述される ($h_t = h(t, x_t, y_s, s \leq t)$ のような形式の) より一般的な

* 大阪教育大学 名誉教授

Key Words: イノベーション過程, 最適伝送, 観測機構の最適化, Kalman フィルター

場合について, Cirelson[44]によってこの仮説の反例が示されたことから, 状況はさらに複雑化した。

しかし, フィルタリングへの応用に限って言えば, すでに, 1972年に2乗可積分マルチンゲールの理論を用いて, その表現定理 [46; 定理 7.18] から, 一般的な観測モデルについて, フィルター推定値はすべてイノベーション過程より生成可能であることが示されていた [45]. このため, 実用上はイノベーションと観測の情報等価性の成立が必須という状況ではなかった。

私は, まだ1)の研究テーマに取り組んでいた大学院生時代に, 國田先生の著書 [46]を研究室の同僚である大学院生数人と輪読をして, 以上のような状況について知った。

そして, 1981年には Allinger と Mitter[47]により, Kailathの提唱以来長らく懸案となっていたこの仮説の証明がついに示され, 決着がついた。

2.2 イノベーションの情報等価性の議論から想起した研究

上述のこれまでの研究テーマのうち2)と3)がこれに相当する。それ以前の1)のジャンプパラメータ系を扱った研究では, 意図的に観測雑音の係数がジャンプパラメータを含んでランダムな場合についての数学的議論は除いていた。

それは, 当時, 雑音の共分散行列がランダムに変動するこのような場合については, 観測データの情報構造がよくつかめていなかったためである。

ここで, 読者に問いたい。

加法雑音の未知の共分散行列の値は
観測データから求められるか?

おそらく, 多くの人(とくに, 連続時間の観測機構を扱った経験があまりない人)は「No.」と答えると思われる。しかし, 実は, 数学的には「Yes.」なのである。

共分散行列がランダムに変動する加法雑音は, 確率過程論で2乗可積分マルチンゲールというクラスに属する。ところが, [46]を読んだことで, これらのマルチンゲールを観測雑音とする観測について, 「観測データ \mathcal{Y}_t に関して可測(観測過程から構成可能)な2次共変動過程(quadratic covariation process)が存在する」ということに気が付いた。そして, 驚くべきことに, この2次共変動過程が時間パラメータ t について微分可能であれば, 加法雑音の共分散行列は(数学的には)観測データから求まるのである。

例えば, R_t をランダムな係数行列として,

$$dy_t = h_t dt + R_t dv_t, \quad y_0 = 0 \quad (3)$$

の場合, $y_t y_t'$ の確率微分は, 伊藤の確率微分則から,

$$d\{y_t y_t'\} = y_t dy_t' + dy_t y_t' + R_t R_t' dt \quad (4)$$

与えられる。すなわち,

$$\int_0^t R_s R_s' ds = y_t y_t' - \int_0^t y_s dy_s' - \left(\int_0^t y_s dy_s' \right)' \quad (5)$$

なる関係が成り立つ。これの左辺が2次共変動過程であり, (数学的には)確かに, 観測データ \mathcal{Y}_t から構成可能であることがわかる。

従って, この場合観測データは, 従来の Brown 運動過程としてのイノベーション過程以外の情報をもつことは明らかである。そして, この2次共変動過程が観測データ \mathcal{Y}_t に関して可測という性質から, (3)式のような観測機構の場合, 一般化イノベーション過程を(2)式で定義した場合,

$$\begin{aligned} & \text{(一般化イノベーション過程)} \\ & = \text{(2次共変動過程)} + \text{(Brown 運動過程)} \end{aligned} \quad (6)$$

という, 2次共変動過程と Brown 運動過程の2つの成分より構成されていることが分かった。つまり, この両者とも観測データから構成できるため, この2つの成分に分解できることになる。

最初は, ジャンプパラメータは不連続過程であるため, 2次共変動過程が時間パラメータ t について微分可能という条件がやや気になり, 状態依存性の観測雑音の場合(R_t が信号 x_t の関数である場合)を扱った [6],[8]。

その後, R_t がジャンプパラメータに依存する場合なども考察した [10]。

とくに [8]では, 単に(6)式の分解が成立することだけではなく, このような状態依存性雑音を伴う観測データによるフィルタリング問題について, より実用的な観測データの取り扱い方法についても議論した。

というのも, 2次共変動過程が観測データ \mathcal{Y}_t に関して可測であるといっても, これはあくまでも数学的な話である。つまり, これは「いくら時間軸を拡大しても有限時間区間内には常に無限個の観測値が存在している」ということが前提になっている。すなわち, 観測データ自身がパラメータ推定理論における「一致性」[48]の成立が実証可能な情報密度(無限個の標本値)を常に有していることが前提条件となった結果である。

ところが, 我々が連続時間の観測モデルを数値計算に利用する場合には, サンプリング間隔が極短い離散時間観測の時系列を対象としており, このような前提条件は明らかに不成立である。よって, 観測データから共分散行列の正確な値を求めることはできない。つまり, 数学的に設定した状況と現実のデータ処理における状況には大きな乖離が存在する。

実は, のちに数理ファイナンスの研究分野でも, このような状態依存性の雑音を伴う観測モデルが利用されるようになり, ここで述べた乖離が問題となっているときいたことがある。

なお, (6)式の分解の成立とそれと観測データの等価性については, その後 [13]として, 一般的な証明を与えた。

3. 通信路エネルギー制約条件の下で 相互情報量を最大にする伝送法

3.1 1990年以前の既知の結果

大学院生時代に読んだ國田 [46] の中で、フィルタリングやイノベーションに関連して説明されていた標記の問題は、私にとって印象深く、かつ、疑問を残して、常に気にかかるものであった。國田 [46] の引用元となった研究は Ihara [51] で、彼はシャノン流の情報理論、とくに、確率信号のエントロピーや相互情報量に関する研究者であった [52]。

この問題は、フィルタリングでは「フィードバックをもつ観測機構」、情報の最適伝送問題では「フィードバックをもつ通信路」とそれぞれ呼ばれるモデルで記述される。フィルタリングにおける観測は、通信路の出力とも考えられるので、ここでは、情報の最適伝送問題の用語を用いて書く。すなわち、ある Gauss 信号過程 $\mathbf{x} \equiv \{x_t; 0 \leq t < \infty\}$ を通信路を通して送る際に、信号 x_t そのものを送るのではなく、それまでの出力 $\mathbf{y}^t \equiv \{y_s; 0 \leq s \leq t\}$ に基づいて符号化を行った信号 $\beta_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \beta_t(x_t, y_s, s \leq t)$ を送信する。よって、通信路のモデルは、

$$dy_t = \beta_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})dt + dv_t, \quad y_0 = 0 \quad (7)$$

となる。ただし、 $\beta_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は x_t に関して線形で、

$$\beta_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H_t(\mathbf{y})x_t - \phi_t(\mathbf{y}) \quad (8)$$

のような「観測フィードバックにより符号化された信号」であり、 $H_t(\mathbf{y})$ 、 $\phi_t(\mathbf{y})$ は $\mathbf{y}^t \equiv \{y_s; 0 \leq s \leq t\}$ の汎関数である。

問題は、(8) 式の $\beta_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ のうちで、通信パワーに関する制約条件：

$$P_t \triangleq E \left\{ \int_0^t |\beta_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 ds \right\} \leq P_t^0, \quad (9)$$

P_t^0 : 通信パワーの上限值

のもとで、信号 $\mathbf{x}^t \equiv \{x_s; 0 \leq s \leq t\}$ と通信路出力 $\mathbf{y}^t \equiv \{y_s; 0 \leq s \leq t\}$ の相互情報量：

$$I_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \frac{1}{2} E \left\{ \int_0^t \left| \beta_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \hat{\beta}_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right|^2 ds \right\} \quad (10)$$

を最大にするものを求めるというものである。ただし、 $\hat{\beta}_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は観測データ $\mathcal{Y}_t = \sigma\{y_s; 0 \leq s \leq t\}$ に関する $\beta_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の条件付き平均である。

ここで重要な点は、(10) 式の相互情報量は $\phi_t(\mathbf{y})$ の選び方には依存しないということである。従って、この問題の解は単純で、

(1) $\phi_t(\mathbf{y})$ は (9) 式の P_t の値が最小となるように選ぶ。

(2) $H_t(\mathbf{y})$ は (9) 式が等号で成り立つように決める。

ということになる [51]。さらに、(1) の $\phi_t(\mathbf{y})$ の最適値は、(8) 式の右辺第 1 項の条件付き平均：

$$\phi_t^o(\mathbf{y}) = H_t(\mathbf{y})\hat{x}_t \quad (11)$$

で与えられることも最小分散推定理論から明らかである。しかもこの時、(7) 式の通信路モデルは、 $H_t(\mathbf{y}) \equiv H(t)$ の場合では、

$$d\bar{y}_t = H(t)x_t dt + dv_t, \quad \bar{y}_0 = 0 \quad (12)$$

に対して、

$$dy_t = d\bar{y}_t - H(t)\hat{x}_t dt, \quad y_0 = 0 \quad (13)$$

であるから、これは通信路の出力が（観測 $\bar{\mathbf{y}} \equiv \{\bar{y}_t; 0 \leq t < \infty\}$ の）イノベーション過程になることを意味する。つまり、「イノベーション過程は (7) 式と (8) 式のような符号化された観測機構の観測信号の中で、相互情報量一定の下で信号エネルギーを最小にするという意味で最適なものである」ということである。

なお、 $H_t(\mathbf{y})$ の最適化に関しては、Liptser-Shiyayev [50] に $H_t(\mathbf{y}) \equiv H(t)$ の場合を考えれば十分であることが示されている。

3.2 Ihara [51] の結果から想起した研究

Ihara [51] の結果、それを引用した國田 [46] や Liptser-Shiyayev [50] を読んで生じた疑問点は、以下の通りであった。

(a) これらはすべて、信号が正規性で、加法雑音がやはり正規性の Brown 運動過程の場合についての結果である。より一般的な 2 乗可積分非正規性信号や雑音が 2 乗可積分マルチンゲールの場合には同じ結果が成り立つか否か。

(b) 上には述べなかったが、Ihara [51] には、 $H_t(\mathbf{y}) \equiv H(t)$ の場合について、 $H(t)$ の最適値の求め方についても議論がある。しかし、信号や通信路出力がともにスカラー値の場合に限られている。これらが多次元のベクトルの場合のゲイン行列 $H(t)$ の決め方はどのようなものか。

上記の 4) と 5) は、これら (a)、(b) を取り扱ったものである。

まず、(a) については、Ihara [51] の結果を、非正規性信号および 2 乗可積分マルチンゲール雑音の場合へ拡張して示した [14]。この証明においては、取り扱う観測機構についてイノベーションと観測の情報等価性が成り立つことが前提条件となっており、すでに、[13] に示した結果が得られていたことが助けとなった。

一方、(b) については、信号および加法雑音が正規性の場合に限定して議論することにした。それは、(10) 式の右辺の期待値は x_t の推定誤差共分散行列の関数となるが、推定誤差共分散行列が Riccati 方程式の解として明確な形で得られるのは、この正規性の場合のみであるからである。この場合、既知の Ihara [51] の結果から、結局、

$$dy_t = H(t)\{x_t - \hat{x}_t\}dt + dv_t, \quad y_0 = 0 \quad (14)$$

を通信路のモデルとしたとき, (9) 式は,

$$P_t = \int_0^t \text{tr}[H(s)Q_s H'(s)]ds \leq P_t^0 \quad (15)$$

となるから,

$$I_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \int_0^t \text{tr}[H(s)Q_s H'(s)]ds \leq \frac{1}{2} P_t^0 \quad (16)$$

$$Q_t \triangleq E\{[x_t - \hat{x}_t][x_t - \hat{x}_t]'\} \quad (17)$$

を満たすようにゲイン行列 $H(t)$ を定めればよい. つまり, 定常問題を考えると, $H(t) \equiv H$, $Q_t \equiv Q$, また, P_t^0 の時間平均を p^0 として,

$$\text{tr}[HQH'] \leq p^0 \quad (18)$$

を満たすようにゲイン行列 H を定めればよい. Ihara[5] の扱ったスカラーの信号と通信路の場合では, (18) 式から H の値を一意的に決めることができる. しかし, これらが多次元の場合, (18) 式を満たすゲイン行列 H は無数にあり, H には選択の自由度が残されている. そこで, (18) 式を満たすゲイン行列 H の中で,

$$\text{tr}[Q] \rightarrow \min. \quad (19)$$

とするものを求めることを考えた [16]. 信号過程を Kalman フィルターと同様に,

$$dx_t = Ax_t dt + Gdw_t, \quad x_0 = x^0 \quad (20)$$

で与えられるものとして, 一番最初は, H が正方正則 (フィルタリングではめったにない) の場合を考察した [16],[17]. この場合, $p^0 > 2\text{tr}[A]$ であれば, (19) 式を満たす誤差共分散行列 Q は,

$$Q = \sqrt{\lambda}(GG')^{1/2} \quad (21)$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\text{tr}[(GG')^{1/2}]}{p^0 - 2\text{tr}[A]} \quad (22)$$

で与えられ, H は,

$$\begin{aligned} H'H &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ (GG')^{-1/2} A + A'(GG')^{-1/2} \right\} + \frac{1}{\lambda} I \end{aligned} \quad (23)$$

により定めることができるという, 我ながら実にきれいな結果が得られた. これに気をよくして, H が正方でない場合, つまり, 信号 \mathbf{x} の次元が出力 \mathbf{y} の次元より大きい場合について考察を進めた. より一般的なこの場合には, 問題は一気に難解になった. しかし, いくつかの有効な結果 [20]~[22] が得られた. とくに, 文献 [22] では, (21) 式~(23) 式を一般化したきれいな結果が得られた. しかしながら, この結果は, 新たな変数:

$$J \triangleq \sqrt{\lambda}(Q^{-1}GG'Q^{-1})^{1/2} \quad (24)$$

を含む行列連立方程式:

$$A'X + XA = -(J^2 - I) \quad (25)$$

$$XQH' = 0 \quad (26)$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\text{tr}[(JGG'J)^{1/2}]}{p^0 - 2\text{tr}[A]} \quad (27)$$

$$Q = \sqrt{\lambda}J^{-1}(JGG'J)^{1/2}J^{-1} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} H'H &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ J(JGG'J)^{-1/2}JA \right. \\ &\quad \left. + A'J(JGG'J)^{-1/2}J \right\} + \frac{1}{\lambda}J^2 \end{aligned} \quad (29)$$

の形となっており, H が正方正則の場合より, 数値計算上は少しハードルが高くなった.

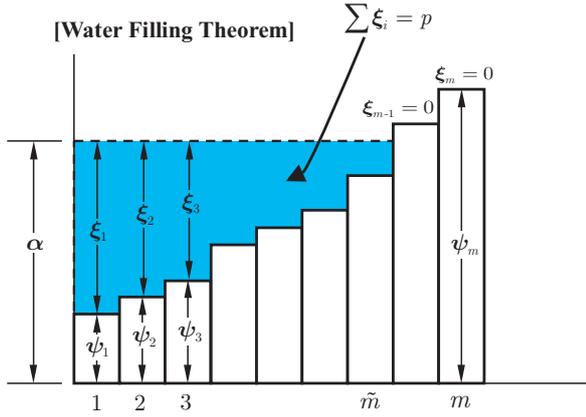
なお, すでに, 文献 [21],[22] では, 論文のタイトルが 6) のようになっている. しかし, この論文での数学的な考察内容は 5) をタイトルとしたものと変わっていない. つまり, 6) の問題について, 当初は以上の結果で対処することを考えていた.

3.3 対応する離散時間の問題についての考察結果

以上述べた 5) の連続時間の問題と並行して, 離散時間の問題も考察した [24],[27]~[29]. 最適フィードバックをもつ多次元通信路における正規性信号の最適伝送問題では, 連続時間の場合とは本質的に異なる点がある.

- 最適フィードバック信号が, 連続時間の場合には原信号のフィルター推定値であるのに対して, 離散時間の場合には予測推定値となる.
- 連続時間の場合では, 出力と原信号の相互情報量と通信パワーについて, 前者が後者の 2 分の 1 となるという完全な依存関係があるのに対して, 離散時間の場合ではこれらの値に直接的な依存関係はない.
- 離散時間の場合では, 通信パワーが一定値以下という条件の下で相互情報量を最大にする最適化問題が機能する. しかし, この最適化により観測ゲイン行列は一意的に定まらず任意性が残る. 従って, この観測ゲイン行列の任意性の範囲で, 連続時間の場合と同様に, 推定誤差分散を最小にするという最適化問題を考察できる.

この離散時間の場合についても, まず, H が正方正則場合について考察した [24]. そして, より一般的な信号 \mathbf{x} の次元が出力 \mathbf{y} の次元より大きい場合についての結果も示した [28],[29]. さらに, これらの一般化の際には, 観測雑音の共分散行列が一般の正定値対称行列の場合を対象とした. そして, 通信パワーが一定値以下の条件下で相互情報量を最大にする H の最適性の条件を示した. すなわち, 行列 HQ^-H' (Q^- は予測誤差共分散行列) の固有値 $\xi_i, i = 1, 2, \dots, m$ と観測雑音の共分散行列 R_0 の固有値 $\psi_i, i = 1, 2, \dots, m$ がよく知られた注水定理 [53] と同様の条件を満たすように, H を決めることであることがわかった [28] (図 1 参照). この点は, 雑音の共分散



第 1 図 離散時間最適伝送の一般化注水定理

行列が単位行列以外の場合の取り扱いが困難である連続時間の場合とは対照的である。しかしながら、多次元の通信路の場合では、この一般化注水定理を満たすようなゲイン行列 H の選択には、連続時間の場合と同様に、自由度が残されている。そこで、このゲイン行列の自由度の中で、連続時間の (19) 式と同様に、 $\text{tr}[Q]$ を最小とする H を求めることにした [28]。なお、文献 [28] では定常問題、文献 [29] では非定常問題を扱った。

4. Kalman フィルターのための観測機構の最適化

4.1 離散時間の問題についての考察結果

すでに 3.2 節～3.2 節で紹介した結果のいくつかは、タイトルに「Kalman フィルターのための観測の最適化」という言葉を含んでいる。すなわち、当初、6) のテーマへの対応はこれらの結果の適用を考えていた。しかしながら、文献 [28],[29] などに示した通り、観測ゲイン行列の最適化の過程で、誤差共分散行列の満たす Riccati 方程式が、平方根行列の 2 次式で表現される（誤差共分散行列についての擬線形の）方程式に置き換えられる。そのため、解の存在条件が Riccati 方程式より厳しくなることがその後判明した。そこで、推定誤差と観測ゲイン行列の 2 次式を評価関数として、これを最小にする観測ゲイン行列 H を求める問題として定式化を変更して考察することにした [31]。実は、この定式化による問題は、1970 年代の観測ゲイン行列の最適化問題の黎明期とも考えられる時代に取り扱われて、有効な結果が得られないため、その後は長期間議論がほぼ途絶えていたのである。その突破口を開いたのは、3 節のテーマの結果に基づき、変数変換を導入したアプローチである。

信号過程 $\mathbf{x} \equiv \{x_t; t=0, 1, 2, \dots\}$ が

$$x_{t+1} = Ax_t + Gw_t, \quad x_0 = x^0 \quad (30)$$

与えられる離散時間 Gauss 過程であるとき、観測機構：

$$y_t = Hx_t + Rv_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (31)$$

の観測ゲイン行列 H を定常誤差共分散行列 Q についての 2 次評価関数

$$\bar{J} = \text{tr}[MQ] + \text{tr}[HNH'] \quad (32)$$

を最小にするように決める問題である。ただし、(30) 式と (31) 式において、 $\mathbf{w} \equiv \{w_t; t=0, 1, 2, \dots\}$ と $\mathbf{v} \equiv \{v_t; t=1, 2, 3, \dots\}$ は互いに独立な白色雑音系列である。また、(32) 式の M は非負定置対称行列、 N は正定値対称行列である。実は、この問題は H を変数とする最適化問題として考察するとうまくいかないのである。非負定置対称行列 $N^{1/2}H'R_0^{-1}HN^{1/2}$ 、 $R_0 \triangleq RR'$ に注目して、

$$H'R_0^{-1}H = N^{-1/2}\tilde{U}\tilde{\Xi}\tilde{U}'N^{-1/2} \quad (33a)$$

$$\tilde{U}'\tilde{U} = I_{\tilde{m} \times \tilde{m}}, \quad \tilde{\Xi} = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\tilde{m}}), \quad (33b)$$

$$\tilde{m} \triangleq \text{rank}[H] \quad (34)$$

と固有ベクトルを列にもつ行列 \tilde{U} と固有値を対角成分にもつ行列 $\tilde{\Xi}$ で表現する。このとき、 \tilde{U} と $\tilde{\Xi}$ が定めれば、 H は

$$H = R_0^{1/2}\tilde{U}\tilde{\Xi}^{1/2}\tilde{U}'N^{-1/2} \quad (35)$$

と取ればよいことは明らかである。ただし、 \tilde{U} は $\tilde{U}'\tilde{U} = I$ を満たす行列である。(33a) 式の右辺が \tilde{U} に依存しないこと、 Q が

$$Q^{-1} = (Q^-)^{-1} + H'R_0^{-1}H \quad (36)$$

を満たすことから、 Q は \tilde{U} に依存しない。ただし、 Q^- は予測誤差共分散行列である。従って、 \tilde{U} は (32) 式の右辺第 2 項を最小にするように決めればよい。文献 [33] に報告した通り、その値は R_0 の固有値の小さい順に、対応する固有ベクトルを \tilde{m} 個とり、その順番に列ベクトルとして並べたものになる。また、最近になって得られた結果 [40] として、 \tilde{U} をこのように定めるとき、(33a) 式を満たす観測ゲイン行列 H は (35) 式で一意的に定まる。よって、結局、最適化のパラメータを H から $(\tilde{U}, \tilde{\Xi})$ に変更して、(32) 式を最小にする $(\tilde{U}, \tilde{\Xi})$ を求めれば、この問題が解けることになる。

結局、 $(\tilde{U}, \tilde{\Xi})$ を定める条件式は行列連立方程式：(33a) 式～(36) 式、

$$Q^- = AQA' + GG' \quad (37)$$

$$N^{-1/2}QXQN^{-1/2}\tilde{U} = \tilde{U}\tilde{\Psi} \quad (38)$$

$$X = F'XF + M, \quad F \triangleq Q(Q^-)^{-1}A \quad (39)$$

を解けばよいことが分かった。ただし、 $\tilde{\Psi} = \text{diag}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{\tilde{m}})$ は R_0 の固有値のうち小さい順に \tilde{m} 個を対角成分に並べた対角行列である。

さて、行列連立方程式：(33a) 式～(39) 式の解を解析的に求めることは明らかに難しい。実は、この最適な観測ゲ

イン行列 H を数値的に求める方法として、当初は (33b) 式の制約条件の下での数理計画法を用いた [32],[35]。つまり、この時点では最適性の条件や上の行列連立方程式は用いていなかった。それは、すでに、文献 [28] で得られた行列連立方程式に関しても、これらを直接解くのではなく、 \tilde{U} が正規直交条件 $\tilde{U}'\tilde{U} = I$ を満たすように値を更新するため、多次元極座標表現を導入し、数理計画法を用いれば (19) 式を最小とする最適点の探索は比較的容易であることが既にわかっていたためである [29],[30]。

とはいえ、数理計画法を用いる場合の計算効率は決して良くはないので、2014年頃から逐次計算によって上の行列連立方程式を解くことを考え始めた。そして、2016年の初頭には「不動点反復法」を用いることで行列連立方程式の数値解が容易かつ迅速に求まることが分かった [40]。

4.2 連続時間の問題についての考察結果

以上述べた離散時間の問題と並行して、連続時間の問題も考察を行った。とくに、[37],[38] では、(33) 式の変数変換の下で、離散時間と同一の最適性の条件式：

$$N^{-1/2}QXQN^{-1/2}\tilde{U} = \tilde{U}\tilde{\Psi} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} X &= F'X + XF + M, \\ F &\triangleq A - QN^{-1/2}\tilde{U}\tilde{\Xi}\tilde{U}'N^{-1/2} \end{aligned} \quad (41)$$

が得られ、連続時間の場合でも、(33a) 式の $H'R_0^{-1}H$ という対称行列が極めて重要なパラメータであることを裏付ける結果となった。離散時間の場合と同様に、(33) 式～(35) 式、(40) 式、(41) 式に、代数 Riccati 方程式：

$$\begin{aligned} AQ + QA' + GG' \\ -QN^{-1/2}\tilde{U}\tilde{\Xi}\tilde{U}'N^{-1/2}Q = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

を加えた行列連立方程式を解けばよいことが分かった。この行列連立方程式についても、取り扱いの詳細は異なるものの、離散時間の場合と同様に、やはり不動点反復法を用いることで数値解が容易かつ迅速に求まることが分かった [40]。

さらに、最新の結果として、 $GG' > 0$ 、かつ、最適な H が (H, A) が可観測な行列ペアとなる集合に属している場合には、この問題の解が一意的に存在することが分かった [40]。

5. おわりに

本稿では、数学的な記号の定義や用法に関する記述は最小限にとどめた。基本的には、引用した著者の論文とほぼ一貫した記述となっている。従って、もし、数学的な記号の定義や用法について、不明と思われるようなものがある場合は、[54] を参照していただきたい。

参考文献

- [1] 明石, 武内: Markov 連鎖係数を有する線形確率系の状態推定; システムと制御, Vol. 21, No. 12, pp. 694–701 (1977)
- [2] 明石, 武内: 連続離散空間で値をとる Markov 過程の推定; 計測自動制御学会論文集, Vol. 14, No. 5, pp. 538–543 (1978)
- [3] 武内, 明石: Markov 連鎖に依存する係数をもつ線形確率系の状態推定—観測雑音の統計量が不規則に変動する場合—; 計測自動制御学会論文集, Vol. 15, No. 3, pp. 345–352 (1979)
- [4] 明石, 武内: 跳躍性外乱を受ける線形確率系の最適制御; システムと制御, Vol. 23, No. 7, pp. 405–413 (1979)
- [5] Y. Takeuchi and H. Akashi: Nonlinear filtering formulas for discrete-time observations; *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 19, No. 2, pp. 244–261 (1981)
- [6] Y. Takeuchi and H. Akashi: Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise; *Proc. IFAC 8th World Congress, 1981*, Vol. 1, pp. 557–562 (1981)
- [7] 武内: 状態依存性雑音を伴う観測機構の観測フィードバックと状態推定; 計測自動制御学会論文集, Vol. 21, No. 12, pp. 1261–1267 (1985)
- [8] Y. Takeuchi and H. Akashi: Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise; *Automatica*, Vol. 21, No. 3, pp. 303–313 (1985)
- [9] Y. Takeuchi: On non-Gaussian innovations processes for observations with non-Gaussian noise; *Proc. 25th IEEE CDC*, pp. 1035–1036 (1986)
- [10] Y. Takeuchi: Innovations informational equivalence for observations with non-Gaussian noise; *Proc. 26th IEEE CDC*, pp. 1163–1168 (1987)
- [11] Y. Takeuchi: Generalized innovations equivalence for observations with Non-Gaussian noise; *Proc. International Sessions 26th SICE Annual Conference, Hiroshima, Japan*, No. 2, pp. 1069–1072 (1987)
- [12] Y. Takeuchi: On the decompositions of observations with non-Gaussian additive noise and their innovations processes; *Lecture Notes in Control and Information Sciences, INRIA 144, Analysis and Optimization of Systems; Proc. 9th International Conference, 1990*, Springer-Verlag, Vol. 144, pp. 248–257 (1990)
- [13] Y. Takeuchi: Innovations informational equivalence for a class of observations with independent non-Gaussian noise; *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. IT-37, No. 5, pp. 1369–1378 (1991)
- [14] Y. Takeuchi: On the optimal transmission of non-Gaussian signals through a noisy channel with feedback; *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. IT-40, No. 5, pp. 1624–1629 (1994)
- [15] Y. Takeuchi and T. Ishikawa: The optimal transmission of a set of correlated Gaussian signals through parallel channels with feedback; *Proc. of 25th ISICIE SSS, Osaka, Nov. 10-12, 1993*, pp. 255–260 (1994)

- [16] Y. Takeuchi and T. Ishikawa: The optimal transmission of multi-dimensional Gaussian signals for channels with noisy feedback; *Proc. of 26th ISCIE SSS, Osaka, Oct. 26-28, 1994*, pp. 33–38 (1995)
- [17] Y. Takeuchi: The optimal transmission of correlated Gaussian signals through parallel channels with feedback; *Proc. 35th IEEE CDC*, pp. 1890–1895 (1996)
- [18] 武内：フィードバックをもつ観測機構に対するイノベーションの情報等価性；計測自動制御学会論文集, Vol. 33, No. 6, pp. 483–487 (1997)
- [19] 武内：非正規性の信号と雑音に対する観測フィードバックの最適化；計測自動制御学会論文集, Vol. 34, No. 9, pp. 1139–1144 (1998)
- [20] Y. Takeuchi: Optimal transmission of a class of multi-dimensional Gaussian signals through parallel channels with feedback; *Proc. of 29th ISCIE SSS, Tokyo, Nov.10-12, 1997*, pp. 201–206 (1998)
- [21] Y. Takeuchi: An information theoretic approach to sensor allocation of Kalman-Bucy filter; *Proc. of 32nd ISCIE SSS, Tottori, Nov. 1-2, 2000*, pp. 105–110 (2001)
- [22] Y. Takeuchi and M. Sowa: An information theoretic scheme for sensor allocation of Kalman-Bucy filter; *Proc. of 33rd ISCIE SSS, Tochigi, Oct. 29-30, 2001*, pp. 234–239 (2002)
- [23] Y. Takeuchi and K. Dei: The optimal transmission of a set of Gaussian signals through parallel channels with feedback; *Proc. of 34th ISCIE SSS, Fukuoka, Oct. 31-Nov. 1, 2002*, pp. 78–83 (2002)
- [24] Y. Takeuchi and A. Ida: Optimal transmission of a set of Gaussian signals through discrete-time channels with feedback; *Proc. of 35th ISCIE SSS, Ube, Oct. 30-31, 2003*, pp. 118–123 (2004)
- [25] Y. Takeuchi and S. Esaki: An Information Theoretic Approach to Optimization of Linear Observations for the Kalman-Bucy Filter; *Proc. of 36th ISCIE SSS, Saitama, Nov. 3-4, 2004*, pp. 165–170 (2005)
- [26] Y. Takeuchi: An information theoretic approach to optimization of linear observations for the Kalman-Bucy filter; *International Journal of Innovative Computing, Information & Control*, Vol. 1, No. 3, pp. 401–416 (2005)
- [27] Y. Takeuchi: Optimal transmission of a set of discrete-time Gaussian signals through channels with feedback; *International Journal of Innovative Computing, Information & Control*, Vol. 2, No. 5, pp. 927–942 (2006)
- [28] Y. Takeuchi: Optimization of linear observations for the stationary Kalman filter based on a generalized Water Filling Theorem; *International Journal of Innovative Computing, Information & Control*, Vol. 4, No. 1, pp. 211–230 (2008)
- [29] Y. Takeuchi and A. Hirata: A method of optimization of linear observations for the Kalman filter based on a generalized Water Filling Theorem; *International Journal of Innovative Computing, Information & Control*, Vol. 5, No. 1, pp. 75–85 (2009)
- [30] Y. Takeuchi and M. Inoue: Optimization of observations for LQG control systems by an information theoretic approach; *International Journal of Innovative Computing, Information & Control*, Vol. 6, No. 1, pp. 75–87 (2010)
- [31] Y. Takeuchi: Optimization of linear observations for the stationary Kalman filter under a quadratic performance criterion; *International Journal of Innovative Computing, Information & Control*, Vol. 7, No. 1, pp. 85–99 (2011)
- [32] Y. Takeuchi: Optimization of the observation gain matrix for stationary LQG control systems *Proc. of 42nd ISCIE SSS, Okayama, Nov. 26-27, 2010*, pp. 140–147 (2011)
- [33] Y. Takeuchi: Optimization of the observations for stationary LQG stochastic control systems under a quadratic criterion; *International Journal of Innovative Computing, Information & Control*, Vol. 8, No. 3, pp. 2313–2328 (2012)
- [34] Y. Takeuchi and R. Matsumi: Hybrid optimization of the observations for stationary LQG control systems; *Trans. ISCIE*, Vol. 25, No. 12, pp. 366–374 (2012)
- [35] Y. Takeuchi and H. Nakai: A new method of optimization of linear observations for the stationary Kalman filter; *Proc. of 44th ISCIE SSS, Tokyo, Nov. 1-2, 2012*, pp. 21–28 (2013)
- [36] Y. Takeuchi: An improved method of optimization of linear observations for the stationary Kalman filter; *Proc. of 45th ISCIE SSS, Okinawa, Nov. 1-2, 2013*, pp. 1–8 (2014)
- [37] Y. Takeuchi: Optimization of continuous-time observations for the stationary Kalman-Bucy filter; *Proc. of 46th ISCIE SSS, Kyoto, Nov. 1-2, 2014*, pp. 22–29 (2015)
- [38] Y. Takeuchi: Optimization of linear observations for the stationary Kalman-Bucy filter; *Trans. ISCIE*, Vol. 28, No. 12, pp. 467–475 (2015)
- [39] Y. Takeuchi: A finite-step injection problem of discrete-time Kalman filter into the stationary-state with the optimal observation gain matrix; *Proc. of 48th ISCIE SSS, Fukuoka, Nov. 4-5, 2016*, pp. 25–33 (2017)
- [40] Y. Takeuchi: Conditions of existence of the solution of the observation optimization for the Kalman-Bucy filter; *Proc. of 50th ISCIE SSS, Kyoto, Nov. 1-2, 2018*, pp. 61–69 (2019)
- [41] T. Kailath: An innovations approach to least-squares estimation, Part I; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-13, No. 6, pp. 646–655 (1968)
- [42] T. Kailath and P. A. Frost: An innovations approach to least-squares estimation, Part II; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-13, No. 6, pp. 645–660 (1968)

- [43] T. Kailath and P. A. Frost: An innovations approach to least-squares estimation, Part III; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-16, No. 3, pp. 217–226 (1971)
- [44] D. S. Cirelson: An example of a stochastic differential equation having no strong solution; *Theory Probability and Application*, Vol. 20, pp. 427–430 (1975)
- [45] M. Fujisaki, G. Kallianpur and H. Kunita: Stochastic differential equation for the non-linear filtering problem; *Osaka J. Math.*, Vol. 9, pp. 19–40 (1972)
- [46] 國田：確率過程の推定, 産業図書 (1976)
- [47] D. F. Allinger and S. K. Mitter: New results on the innovations problem for non-linear filtering ; *Stochastics*, Vol. 4, pp. 339–348 (1981)
- [48] 中溝：現代制御シリーズ 信号解析とシステム同定, コロナ社 (1988)
- [49] R. S. Liptser and A. N. Shiriyayev: *Statistics of Random Processes, vol. I*, NY: Springer-Verlag (1977)
- [50] R. S. Liptser and A. N. Shiriyayev: *Statistics of Random Processes, vol. II*, NY: Springer-Verlag (1978)
- [51] S. Ihara: Coding theory in white Gaussian channel with feedback; *J. Multi-variate Analysis*, Vol. 4, pp. 74–87 (1974)
- [52] S. Ihara: *Information theory for continuous systems*, World Scientific (1993)
- [53] 瀧：情報論 I, 岩波全書 306 (1978)
- [54] 武内：確率と確率過程, デザインエッグ (2017)

著者略歴

たけうち よしき
武内 良樹



1951年5月10日生。1979年3月京都大学大学院工学研究科精密工学専攻博士課程修了。1997年4月～2017年3月大阪教育大学情報科学講座教授。2017年4月～2019年3月大阪教育大学特任教授。確率システムの推定, 制御の研究に従事。大阪教育大学 名誉教授。

身近な移動体への非線形カルマンフィルタの実応用 —距離センサの利用—

田中 雅博*

1. はじめに

筆者は、物体の形状や位置などに関連して、レーザースキャナや深度カメラを応用した環境認識、物体認識、姿勢認識などの研究を行っている。物体までの距離を測るには、超音波やレーザー光などによる様々な距離センサが存在する中で、赤外光ビームを一定の角速度で照射し、反射光の到達時間をもとに、距離を計測する ToF (Time of Flight) 形式で直線上の環境形状を取得するレーザースキャナや、ToF により各画素の方向に観測される物体までの距離を計測する深度センサも多数発売されており、マイクロソフト社のキネクト v2 などが有名である [1]。それ以外に、視点のずれを用いて対象物の各部分までの位置を推定し、さらには形状も推定することができるステレオカメラも存在する。

このようなセンサは、移動体に装着し、前方その他周囲の状況を把握し、異常を検知する目的で用いることがある。筆者は、このようなセンサを、歩行者、シニアカー、移動ロボットなどの移動体に装着して、

- レーザースキャナを用いて移動体の自己位置推定および外界の環境認識
- 深度センサを用いて、床（路面）、壁の検出および障害物検知、また、それらからの距離やセンサの向き

などを、非線形カルマンフィルタを用いて行ってきた [2]-[18]。本稿ではこれらを中心に解説する。なお、本稿は、上記の目的に向けた、具体的な問題設定およびそれを解決するための考え方などを中心に述べるが、既発表の論文や解説等をもとにした解説記事であり、記事の性質上それらに含まれる記述や図表の再掲を多く含んでいる。

2. センサは移動体装着

ここで考える問題は、すべてセンサが移動体に装着されており、そのセンサが捉えた情報を処理して自己の位置や姿勢、さらには、周囲環境の推定を行うものである。このような枠組みの問題は、歩行者、移動ロボットや、ロボット掃除機など、屋内での移動や狭い

エリアでの移動などに現れるもので、自己位置推定や環境推定を起点として、安全確認や危険物検知などを行うことができる。

2.1 問題に含まれる推定問題

センサを積んだ移動体から外界を見る場合、観測する情報の中の固定した環境情報部分を見極め、それによりセンサの姿勢を推定し、さらに環境中の危険要素を見きわめるといった、多段の推定が含まれている。そのため、まずセンサが固定されている場合のカメラ座標と、ワールド座標の関係性を明らかにする。その中にはセンサの位置や姿勢を表すパラメータが含まれるため、それらを推定するアルゴリズムが必要である。本稿では、これらの具体的な方法を述べる。

2.2 具体的な問題設定

移動体へ装着したセンサから見た外界を正しくマッピングするには、センサのある位置や向きをもとにした画像の座標変換が必要である。そこで、位置や向きを状態変数にして、観測した情報を変換する。

移動体の状態を表すには、位置として3つの軸 (x, y, z) によるデカルト座標系を定義する。また、姿勢を表現するために、3つの回転を用いる（ヨー、ピッチ、ロール）。これらのうちの必要なものを状態変数にするとよい。

これらの位置や姿勢を表す変数を推定するものとして、以下のような問題を扱う。

2.2.1 問題 1

まず、移動ロボットの自己位置推定である。我々は Segway RMP という、倒立振り子のロボット [19] を使用してきた。このロボットの特徴は、ボディを前後傾かせて重心を移動することにより速度の変化に対応するという点にある。レーザースキャナは、ほぼ水平にスキャンするように取り付けられているが、前後の加速により、視点が数度上下する。しかしながら、走行エリアは大学中庭で、周囲環境も、樹木部分を除き、上下方向に変化が乏しいとみることができる。そこで、平面上での移動と考えることにする。また、ロール角はほぼ無視できる。そこで、平面位置 (x, y) 及び方向 θ の合わせて3つの値を推定すべき変数とする。

また、ここではあらかじめ手作業あるいは SLAM (Simultaneous Localization And Mapping)[20],[21] 等

* 甲南大学 知能情報学部

Key Words: 移動体, 非線形カルマンフィルタ, 距離センサ

により作成した環境マップ（形状）を用いる。

2.2.2 問題2

移動するロボットや歩行者などに Kinect などの深度センサを装着し、このセンサだけで自己の姿勢推定を行い、その値を用いて路面上の障害物や穴など、環境認識する。

あらかじめ環境中にどんな物体があるかという情報を持たない場合、多少の障害物やくぼみがあるにしても、移動ロボットあるいは人などが街路や屋内を移動する場合、平らな路面（床面）を想定することが可能であろう。また、壁面も、建物があれば存在する。

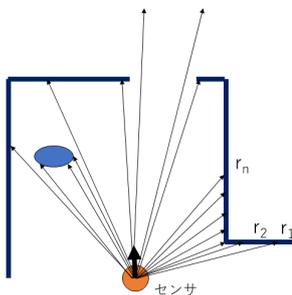
推定すべき変数としては、危険検知を最大の目的とするのなら、路面を正確に検出することが必要となる。すなわち、高さが必要であろう。さらに、センサの姿勢を明確にすれば、高さ情報の異なる障害物の検出も可能になるから、センサのピッチ角及びロール角が必要である。いま、どこにあってもどちらを向いていてもかまわないという条件であれば、 (x,y) 及びヨー角は推定不要である。

3. 【問題1】レーザースキャナを用いた移動ロボットの自己位置推定と環境物体の認識

ロボットは平面上を移動する。ここで推定すべき状態変数を、平面上の位置 (x,y) 及び向き θ とする。すなわち、

$$\mathbf{x} = [x \ y \ \theta]^\top \quad (1)$$

とするとき、このテーマは観測値 $\{\mathbf{r}(1), \dots, \mathbf{r}(k)\}$ と環境 \mathcal{M} から、状態変数 $\mathbf{x}(k)$ を推定することである。なお、 $\mathbf{r}(k)$ は時刻 k における 1 スキャンデータである（詳細は 3.2 で述べる。第1図）。



第1図 レーザースキャナによる観測値

第2図は、実験エリアの様子である ([4] より)。

3.1 ロボットの動的モデル

状態変数の時間更新モデルを

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (2)$$



第2図 実験エリア

とおく。ここに、 $\mathbf{x}(k)$ は推定すべきベクトル、 $\mathbf{u}(k) = [u_x(k) \ u_y(k) \ u_\theta(k)]^\top$ は $k-1$ から k の間の、既知の増加分、 $\mathbf{w} = [w_x \ w_y \ w_\theta]^\top$ は未知成分である。

オドメトリ $\mathbf{u}(k)$ は、車輪の回転数をもとに、進んだはずの距離（左右各々）であり、差分や角度による変換後に得られる。

3.2 観測モデル

RGB 画像の場合、コンピュータビジョンの分野で開発された、特徴点 (SIFT[22], SURF[23] など) を用いるが、ここでは、各点の距離が観測されるので、確率ロボティクスで使われているモデル [20] を用いる。

観測データは、反射面の種類により

- (1) 正常にヒットする環境物体 (HIT)
- (2) 環境データに含まれていない物体。例えば、臨時の車や歩行者、荷物など (SHORT)
- (3) 反射なし (NO_REFLECTION)
- (4) ランダムな値 (RANDOM)
- (5) 透明環境 (TRANSLUCENT)

に分類できる。これは、Thrun ら [20] による議論に、この環境特有のものとして、(5) のガラス面と植え込みを付け加えたものである。

時刻 k における観測データ（センサから環境物体までの距離）を $\mathbf{r}(k) = \{r_\alpha(k), \alpha = 1, \dots, N\}$ とする。ここに、 N は、1 スキャンで計測される点の数で、たとえば、我々の使用した UXM-30LX-E¹ では、 $N = 4 \times 190 + 1 = 761$ である。インデクス α はスキャン角度 $\beta = (\alpha - 1) / 4 - 95^\circ$ に関係するものである。

時刻 k において、状態変数ベクトル $\mathbf{x}(k)$ と環境情報 \mathcal{M} をもとに、観測値は $r_\alpha(k) = \phi(\mathbf{x}(k)) + e_\alpha(k)$ である。ここに、 $\phi(\cdot)$ は r_α がどのモデルに従ったデータなのかを事前にわからない不確実性を有している。以下、確率密度関数を用いて、この点を明確にしてゆく。

I_i を、情報源を指し示すインデクスとする。このとき、

¹これは、北陽電機の商品である； <http://www.hokuyo-aut.co.jp/>

$$\begin{aligned}
 & p(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) \\
 &= \sum_{i \in \{h,s,n,r,t\}} p(r_\alpha(k), I_i|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) \\
 &= \sum_i p(I_i) p_i(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) \\
 &= \begin{pmatrix} p_h \\ p_s \\ p_n \\ p_r \\ p_t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_h(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) \\ p_s(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) \\ p_n(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) \\ p_r(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) \\ p_t(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) \end{pmatrix} \quad (3)
 \end{aligned}$$

ここに、 (\mathbf{a}, \mathbf{b}) の書式は、内積を表す。 p_h, p_s, p_n, p_r, p_t は5つのケースの事前確率、 $p_i(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k), \mathcal{M})$, $i \in \{h, s, n, r, t\}$ は観測値 $r_\alpha(k)$ の条件付き確率密度関数である。

(1) HIT

“Hit” は、レーザーが環境マップに記載されているものから直接反射して観測される場合である。尤度関数は、

$$\begin{aligned}
 & p_h(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(r_\alpha(k) - \hat{r}_\alpha)^2\right) \quad (4)
 \end{aligned}$$

と定義する。

(2) SHORT

“Short” は、マップに記載されていない歩行者や駐車中の車両などからの反射を示す。

$$\begin{aligned}
 & p_s(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) \\
 &= \begin{cases} \eta_s \lambda_s e^{-\lambda_s r_\alpha(k)}, & 0 \leq r_\alpha(k) \leq \hat{r}_\alpha(k) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)
 \end{aligned}$$

η_s は、正規化のための定数 $\eta_s = 1/(1 - e^{-\lambda_s \hat{r}_\alpha(k)})$ である。

(3) NO REFLECTION

“No reflection” は文字通り反射なしを示す。これは、センサの感知範囲内に物体がない場合などに起こる。

$$p_n(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) = \begin{cases} 1, & \text{if } r_\alpha(k) = r_{\max} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

(4) RANDOM

“Random” は、LRF が故障している場合などである。

$$p_r(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) = \begin{cases} \frac{1}{r_{\max}}, & \text{if } 0 \leq r_\alpha(k) \leq r_{\max} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

(5) TRANSLUCENT

“Translucent” は、ガラス壁面や植え込みのように、マップ位置よりも遠いところから反射してくる可能性

がある素材の部分である。尤度関数を

$$\begin{aligned}
 & p_t(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{r_{\max} - \hat{r}_\alpha(k)}, & \text{if } \hat{r}_\alpha < r_\alpha(k) \leq r_{\max} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)
 \end{aligned}$$

これらの観測モデルをもとに、次の尤度関数

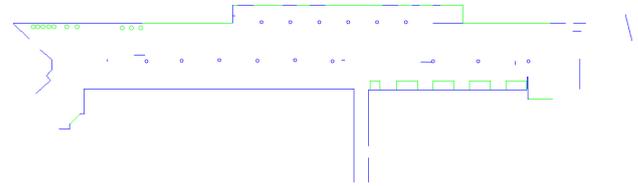
$$p(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) = \sum_{i \in \{h,s,n,r,t\}} p_i p_i(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k),\mathcal{M}) \quad (9)$$

を定義する。

3.3 移動体及び環境の推定アルゴリズム

3.3.1 環境地図

第3図は、実験に用いた環境地図である。色は青は通常の物体（壁面）、緑はガラス面、植え込みなど、透明部分を含む部分である。



第3図 実験に使用した環境マップ。青は通常の物体（壁面）、緑はガラス面、植え込みなど、透明部分を含む部分

3.3.2 状態推定スキーム

推定はパーティクルフィルタ [24] を用いた [2]。

- (1) 初期状態 $\mathbf{x}^{[p]}(0)$ をパーティクル $[p]$ ごとに定義する。 $k=0$ 。
- (2) k によるループ（時間）:
 - (a) p によるループ（パーティクル）:
 - i. (2) 式に基づいて $\mathbf{x}^{[p]}(k)$ を計算する。
 - ii. (3) 式に従って尤度を計算する。
 - (b) 尤度値 [24] に従ってリサンプルする。

3.3.3 事後確率

3.2 で定義した I_i を時間ごと、角度ごとに $I_\alpha(k) \in \{h, s, n, r, t\}$ と再定義しよう。このとき、時刻1から k までの観測値および環境マップが与えられたときの条件付き確率は

$$\begin{aligned}
 & p(I_\alpha(k) = i | R^{1:k}, \mathcal{M}) \\
 &= \frac{p_i(r_\alpha(k)|R^{1:k-1}, \mathcal{M}) p(I_\alpha(k) = i | R^{1:k-1}, \mathcal{M})}{\sum_j p_j(r_\alpha(k)|R^{1:k-1}, \mathcal{M}) p(I_\alpha(k) = j | R^{1:k-1}, \mathcal{M})} \quad (10)
 \end{aligned}$$

となり、 $p(\mathbf{x}(k)|R^{1:k-1}, \mathcal{M})$ がシングルトンに近いと仮定すれば

$$\begin{aligned}
 & p_i(r_\alpha(k)|R^{1:k-1}, \mathcal{M}) \\
 &= \int p_i(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k), \mathcal{M}) p(\mathbf{x}(k)|R^{1:k-1}, \mathcal{M}) d\mathbf{x}(k) \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\simeq p_i(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k), \mathcal{M}) \quad (12)$$

となる。また、

$$p(I_\alpha(k) = i | R^{1:k-1}, \mathcal{M}) = p_i \quad (13)$$

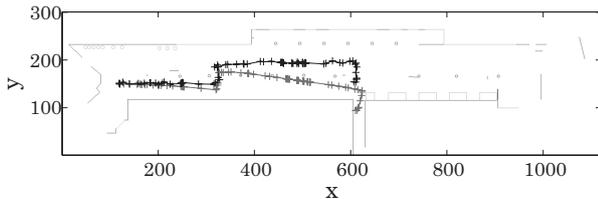
なので、

$$p(I_\alpha(k) = i | R^{1:k}, \mathcal{M}) \simeq \frac{p_i p_i(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k), \mathcal{M})}{\sum_j p_j p_j(r_\alpha(k)|\mathbf{x}(k), \mathcal{M})} \quad (14)$$

3.4 実験結果

3.4.1 シニアカーが停まっていた場合

第4図は、シニアカーがロボット周辺にあったときのロボットの自己位置推定結果である。プラス記号(+)は推定された値を示し、線分はそれらをつないでいる。明るい印はオドメトリの値のみでの予測位置を示し、暗い色は我々のアルゴリズムでの推定値である([5]より)。ロボットは(120,150)からスタートした。ロボットが最初のターニングポイントに行くまでの間(200,180)付近にシニアカーが駐車していた。その後は、シニアカーはロボットを追跡し3番目のターニングポイント過ぎまで行った。



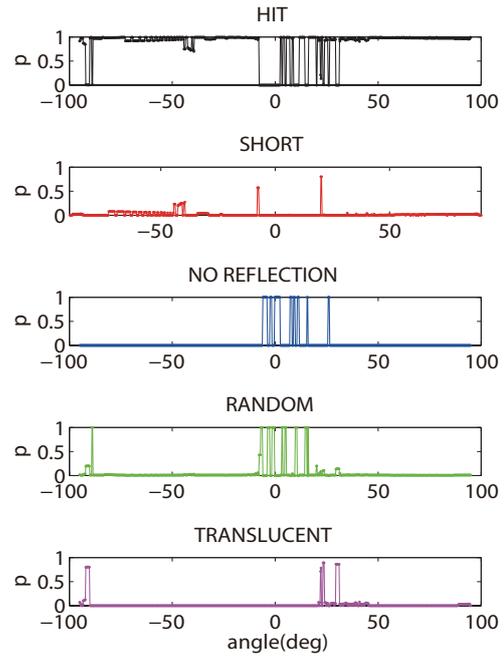
第4図 シニアカーが付近にあったときのロボットの自己位置推定。プラス記号(+)は推定位置でそれらを線分でつないでいる。傾いている軌跡は、オドメトリだけ使用して、本アルゴリズムを使用していない場合。こんなに短距離でも、オドメトリだけだと誤差が出る。

第5図は、1スキャンデータ -95° から 95° の1度ずつの事後確率である。ちなみに、ロボットの位置は(120,150)、右方向を向いている。ほとんどの点はHITとなっており、SHORTとなっているのは、シニアカーの部分などである。右のほうには建物がない部分があり、それがNO REFLECTIONなどになっている。また、透明なガラスがあり、TRANSLUCENTに現れている([5]より)。

3.4.2 人が10人いる場合

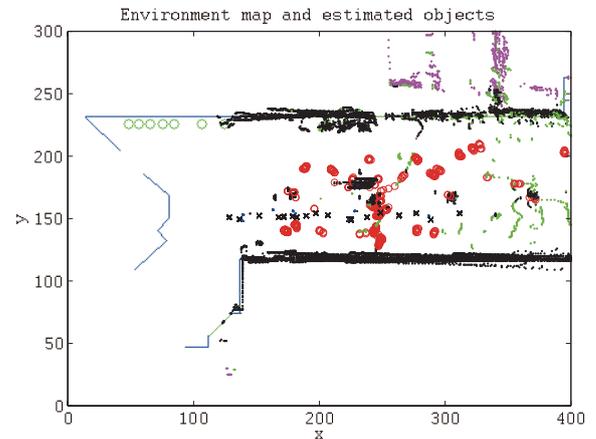
第6図は20回の推定結果をオーバーラップして表示したものである。動いている人の位置がそれぞれ表示されているので人の数より多いが、人が検出されているのがわかる。また、ガラスの後方に透けて見えているものが表示されている。これは、教室の壁などである([5]より)。

同じデータに対して、第7図は、 $p_r = 0$ とした場合



第5図 5つのケースの事後確率

である。これを見ると明らかなように、RANDOMを認めている第7図に比べてかなり推定結果が悪くなる([5]より)。

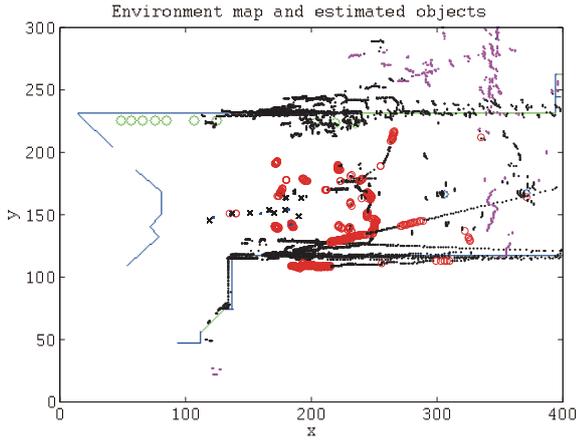


第6図 $p_r = 0.05$ としたときのロボットの推定位置((x印)と環境検出結果

4. 【問題2】深度センサを用いた歩行者や移動体の姿勢推定

4.1 カメラ座標系

X を前方方向、 Y を左方向、 Z を高さ方向の、それぞれ直交する軸とする。



第7図 $p_r=0$ としたときのロボットの推定位置(×印)と環境検出結果

第1表 推定された物体の属性.

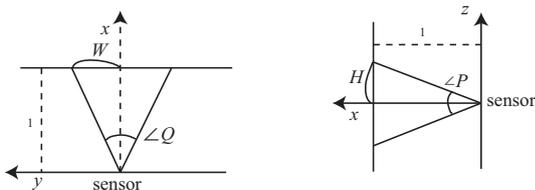
ケース	色
HIT	黒
SHORT	赤
NO REFLECTION	青
RANDOM	緑
TRANSLUCENT	マゼンタ

4.2 深度センサの観測モデル

深度画像の大きさを n_V (縦) \times n_H (横), 左上を原点とし, ワンショット (1 フレーム) で取得されるデータは, $\{r_{ij}(k); i=1, \dots, n_V, j=1, \dots, n_H\}$ と表現する. センサの画素位置と3次元空間内での関係を示す数学モデルはベンダーからは公式には提供されないケースが多い. しかし, 我々の目的においては, ある程度の精度のある観測モデルを準備しなければ目的が達成出来ないため, 筆者は以下のモデルを今まで使用してきた.

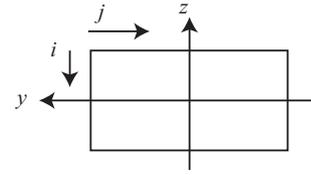
4.2.1 等幅モデル

第8,9図は, 等幅モデルを図示したものである. 等幅モデルとは, センサから平面を鉛直方向から見たとき, 縦のそれぞれの画素間, 横のそれぞれの画素間の実距離が等しいものを指す. そのため, 距離が1である場合の, 横 i 番目, 縦 j 番目の位置をまず求め, それを距離 r_{ij} 倍する.



第8図 等幅モデルにおける関係

まず, 第8図の左の図において, 水平方向の視野角



第9図 正面向きにおけるワールド座標 (x,y) と画面座標 (i,j)

$\angle Q$ と, 視野角半分に対応する長さ W の関係および垂直方向の関係は,

$$\tan \frac{\angle Q}{2} = W, \quad \tan \frac{\angle P}{2} = H \tag{15}$$

となる. そこで, センサから正面方向を x 軸, 左方向を y 軸, 上方向を z 軸とすると (右の図), 第 (i,j) 番目の点について, 以下の関係が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{bmatrix} = r_{ij} \begin{bmatrix} 1 \\ -\left(j - \frac{n_H - 1}{2}\right) \frac{W}{(n_H - 1)/2} \\ -\left(i - \frac{n_V - 1}{2}\right) \frac{H}{(n_V - 1)/2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ h \end{bmatrix} \tag{16}$$

ここで, 画素と実座標との関係を, モデルによらず, 一般的に

$$\begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{bmatrix} = r_{ij} \begin{bmatrix} c_{ij}^{(1)} \\ c_{ij}^{(2)} \\ c_{ij}^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ h \end{bmatrix} \tag{17}$$

と書くことにする.

4.3 座標系

4.3.1 ワールド座標

直交座標 (x,y,z) とする. センサの真下を原点とする.

4.3.2 センサの姿勢パラメータ

以上のセンサの観測モデルは, センサの正面が水平方向の場合のものであって, 多くの応用では, センサの姿勢が変わることを考慮に入れなければならない. 例えば, 下向きにセンサを設置して, 上から人の動作を監視したり, 壁に斜めに取り付けて通行人を捉えるなどの応用問題があるだろう.

向きがあるセンサの姿勢は, 位置の3次元座標と3次元回転の6つのパラメータを使って表現でき, 3つの軸を順番に回転させるオイラー角の他に, 回転軸ベクトルと回転量を使う表現や, 四元数などが知られている [25]. ここでは, 軸毎に回転を順番に行う, オイラー角による回転をモデル化することにする.

オイラー角による回転は順序に依存するため, 順序が異なれば同じ回転であっても, パラメータの値が異なるという特性がある. ここでは, まず上下 (ピッチ方向) に α ほど回転, 次にロール方向に ψ ほど回転, 最後にヨー方向に γ ほど回転をするものとしよう. セ

ンサがこのような回転したときの第 (i, j) 画素方向にある物体の世界座標 (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) は以下の式で示される。

$$\begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{bmatrix} = r_{ij} R_z(\gamma) R_x(\psi) R_y(\alpha) \begin{bmatrix} c_{ij}^{(1)} \\ c_{ij}^{(2)} \\ c_{ij}^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここに、 $R_y(\alpha)$ は y 軸周りの軸の回転である。すなわち

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (19)$$

また、 $R_x(\psi)$ 、 $R_z(\gamma)$ についても同様に、それぞれの軸に関する回転行列である。

4.4 変動パラメータでの応用

移動するシニアカー等に装着すると、車両に連動してセンサが振動する。歩行者に装着して、前方の安全確認装置として使用する場合も、センサが振動する。

パラメータが変動する場合は、リアルタイムでパラメータの値を推定しなければならない。その際、見えている物の世界座標が必要となる。しかし、動いている場合に、あらかじめ見えてくる物を想定するというのは、大きな制約になる。そこで、筆者は、床面あるいは路面に着目した。

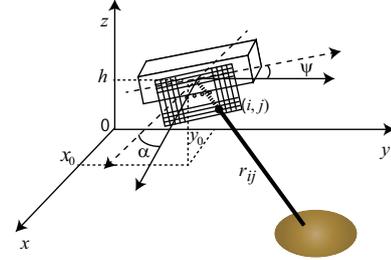
[発想] 視野中の多くの点が路面を見ていると仮定し、高さが 0 に近づくように、未知変数（高さ、ピッチ角、ロール角）のパラメータを推定

たいていの応用では、路面がある程度見えているだろうという仮定である。路面であれば、高さが 0 という、既定の値である。見えている視野の中のどの点が路面上の点か、あらかじめわかっているわけではないが、一般には、かなりの割合の点が路面上の点であるという仮定が可能である可能性が高い。その際、路面上の点ではない点からの情報は邪魔になるので、それらの点を除外するメカニズムを含む必要がある。

そこで、まず、ここでは、取り付けの際に、視野の中心軸が上あるいは下に傾くことと、さらに、ロールする場合をモデルに取り入れる。また、センサの平面上的位置と左右の首振り角は不問にする。

注目する点 (i, j) が路面上にあれば z_{ij} の値はほぼ 0 である。また、障害物に当たっている場合は、路面よりも高い点にあるので $z_{ij} > 0$ 、穴や溝の中に当たっている場合は路面よりも低い点なので $z_{ij} < 0$ である。

第 10 図は、ピッチ角 α 、ロール角 ψ と高さ h が変化する場合を示している。



第 10 図 姿勢の変化

4.5 パラメータ推定 (2) フィルタリング問題としての定式化

4.5.1 状態ベクトルと動的モデル

ここでは、状態ベクトルを \mathbf{q} と記述し、例えば、以下のように定義する。

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T = [\alpha \ \psi \ h]^T \quad (20)$$

次に、この問題をフィルタリング問題として定式化するため、観測値と \mathbf{q} とを関係づける観測モデルと、 \mathbf{q} の時間的変化を示す動的モデルが必要である。

4.5.2 観測モデル

もし (i, j) 番目のデータが路面からのものであれば、 $z_{ij}(k)$ は 0 である。よって、(18) 式において $z_{ij}(k) = 0$ とおけば、非線形観測方程式

$$r_{ij}(k) = \frac{q_3}{A} \quad (21)$$

$$A = c_{ij}^{(1)} \sin q_1 \cos q_2 + c_{ij}^{(2)} \sin q_2 - c_{ij}^{(3)} \cos q_1 \cos q_2$$

を得る。(21) 式を i, j について縦に並べ替えると、

$$\mathbf{r}(k) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(k)) + \mathbf{e}(k) \quad (22)$$

ここで、 $e_{ij}(k)$ は観測ノイズである。

観測モデルが非線形で、計算処理時間の制約があるので、処理量がパーティクルフィルタなどに比べて少ない拡張カルマンフィルタ [26] (EKF) が適当である。その中で、路面と判断される点を除外してフィルタを構成する。

4.5.3 状態時間更新モデル

センサの取り付けに関して考察を深め、位置や角度のみならずそれらの速度情報も入れたモデルを考えることもできるが、ここでは、簡単のためにランダムウォークモデル

$$\mathbf{q}(k+1) = \mathbf{q}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (23)$$

を使う。歩行者に装着したりすることを前提としているので、オドメトリは使用しない。

4.6 状態推定アルゴリズム

非線形性及び対象データの選別メカニズムが含まれているため、初期値の許容範囲が狭い。それを解消す

るために、ここではトライアンドエラーアプローチを採る。すなわち、初期値はあらかじめ定めた、初期値候補からランダムに生成し、それにより収束に向かわなかったら、新しい初期値を生成し直す。

Step 1. 初期値の設定 $\hat{q}(0)$ と $\hat{P}(0)$ を与える

Step 2. 繰り返し

Step 2.1 観測ベクトルに含めるデータを選別 間引かれた (例えば $(640/16) \times (480/16)$ 個の点について), r_{ij} の推定値を求め、誤差が十分少ない点を観測値に含める。

Step 2.2 拡張カルマンフィルタを適用

$$\bar{q}(k) = \hat{q}(k-1) \quad (24)$$

$$\bar{P}(k) = \hat{P}(k-1) + Q(k) \quad (25)$$

$$\hat{q}(k) = \bar{q}(k) + K(k)(r(k) - f(\bar{q}(k))) \quad (26)$$

$$\hat{P}(k) = \bar{P}(k) - K(k)\bar{H}(k)\bar{P}(k) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} K(k) &= \bar{P}(k)\bar{H}(k) \\ &\times [\bar{H}(k)\bar{P}(k)\bar{H}(k)' + R(k)]^{-1} \\ &= [\bar{P}(k) + \bar{H}^T(k)R^{-1}(k)\bar{H}(k)]^{-1} \\ &\times \bar{H}^T(k)R^{-1}(k) \end{aligned} \quad (28)$$

ここに、 $\bar{H}(k)$ は $\bar{q}(k)$ を用いて計算したヤコビ行列 (29) 式である。ここでは、(28) 式の 2 番目の式を有効に適用できる。というのも、行列 $R(k)$ は $e(k)$ の共分散行列であり、対角と仮定できるので、 $\tilde{N} \times \tilde{N}$ の逆行列を必要としないからである。

Step 2.3 データ各点を評価得られた姿勢パラメータを用いて、再度各点の高さを求め、判定する。

Step 2.4 床面よりも高い点、低い点の個数をカウント床面がない点の個数を求める。これにより、アラームを発する。

Step 2.5 リセット条件をチェックリセット条件のいずれかが満たされたら、ステップ 1 に戻り、リセットする。

4.7 ヤコビ行列

障害物あるいは穴と判断されるデータにおいては、データを除外するというポリシーを進める。

拡張カルマンフィルタを適用するためには、 $f(q(k))$ のヤコビ行列

$$H = \partial f / \partial q = \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} & H_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{\tilde{N},1} & H_{\tilde{N},2} & H_{\tilde{N},3} \end{bmatrix} \quad (29)$$

を求める必要がある。H のサイズは $\tilde{N} \times 3$ であり、関数形は (21) から、次のように求められる。

$$\begin{aligned} H_{ij,1} &= \frac{\partial f_{ij}}{\partial q_1} \\ &= \frac{q_3}{\beta^2} (c_{ij}^{(1)} \cos q_1 \cos q_2 - c_{ij}^{(3)} \sin q_1 \cos q_2) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} H_{ij,2} &= \frac{\partial f_{ij}}{\partial q_2} = \frac{q_3}{\beta^2} (-c_{ij}^{(1)} \sin q_1 \sin q_2 + c_{ij}^{(2)} \cos q_2 \\ &\quad - c_{ij}^{(3)} \cos q_1 \sin q_2) \end{aligned} \quad (31)$$

$$H_{ij,3} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial q_3} = -\frac{1}{\beta} \quad (32)$$

上記の式は床・路面高さに近い点のみで適用可能なので、それから外れる点は除外する必要がある。次のように行う。

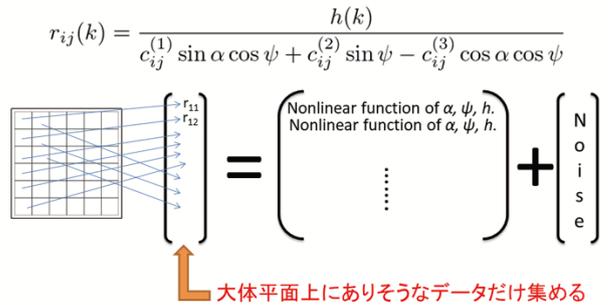
- (1) r_{ij} を、(22) 式の中の現在推定できている値 q で推定する。
- (2) もし推定値が観測値と大きく外れていたら、観測ベクトルから除外する。

よって、H のサイズ ($\tilde{N} \times 3$) の \tilde{N} は可変である。観測に含まれる r_{ij} を「有効データ」(valid data) と呼ぶ。それでも、観測ベクトルの次元は大きすぎるので、16 分の 1 程度に間引いて使う。

4.7.1 高さおよび路面上の点の推定点 (i, j) の高さ推定値は

$$\hat{z}_{ij} = -r_{ij}(c_{ij}^{(1)} \cos \hat{\psi} \sin \hat{\alpha} + c_{ij}^{(2)} \sin \hat{\psi} - c_{ij}^{(3)} \cos \hat{\psi} \cos \hat{\alpha}) + \hat{h}$$

によって求められる。右辺に現れる $\hat{\alpha}, \hat{\psi}, \hat{h}$ は上記アルゴリズムによって得られた推定値である。なお、(18) 式により、 x, y の推定値も得られる。高さ推定値より、路面上の点と判断される点を決定する。



第 11 図 データの集め方

4.8 初期値の決定方法

4.8.1 理論的な初期値

カルマンフィルタ [24]-[30] は、ベイズ推定の枠組みで導出できる。そのため、時間更新では、2 つのガウス変数の和となり、誤差共分散は一旦広がるが、それもガウス変数であり、観測更新では、観測値を条件とする条件付き期待値により、絞り込むという 2 つのステップが交互に繰り返される。絞り込まれた後もガウス変数となる。拡張カルマンフィルタはそれを部分的

に線形近似したものである。通常、カルマンフィルタにおいて、初期値はあまり気になるものではなく、わずかに数回繰り返せばどこから始めても同じような結果になるということを経験的に知る読者も多いに違いない。

しかし、本稿で述べたような、使用する観測値を選ぶような機構が入っているアルゴリズムではそれはうまくいかない。

その理由は2段階で考えるとよい。まず、非線形関数を線形近似しているため、初期値の位置によりヤコビ行列は値が異なるため、そもそも、拡張カルマンフィルタの初期値は、収束する範囲が限定される。さらに、本稿で述べているような、使用する観測値を選ぶような機構が入っているアルゴリズムではなおさら困難であるということになる。

4.8.2 解の近傍の初期値

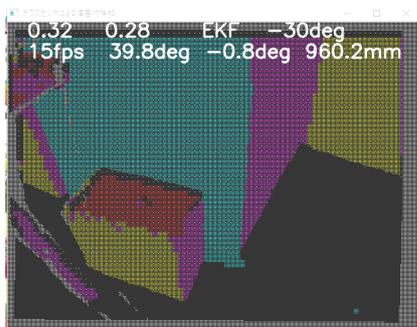
論文等 [9,10,6,8,16] では初期値の条件は特に考慮していなかった。というのも、身体に装着し、 $20^\circ \sim 40^\circ$ の俯角で床や路面を検出するという問題だったからである。[16] では壁面を見つける問題を扱ったが、路面を最初に見つけるという問題設定だったので、それでよかった。

初期値を変えれば、いくつかの問題に適用できる(第2表)。

第2表 通常の初期値

	俯角 [rad]	ロール角 [rad]	高さ [mm]
mean	$\pi/6$	0	1000
variance	1	1	100^2

著者はこの枠組みの中でいろいろな可能性を示してきた。センサの推定された姿勢により、法線ベクトルの方向が計算できる。第12図において、赤は床にほぼ垂直な法線ベクトルを持つ点を示している。さらに、左向きを黄色、右向きをマゼンタで色付けした。また、画面内で最も大きな平面をシアンで色付けした ([15])。



第12図 黄色は右向き、マゼンタは左向き、赤は上向き、最大の平面をシアンで示している

これを繰り返すことにより、第2, 第3平面を示す

ことも可能である。ただし、これはすべて床面を最初に検出するという方法によっている。

4.9 数値例

このアルゴリズムでは、初期値が実際の値から大きく外れていたら、適応するのに長時間かかったり、場合によっては収束しない。数値例で示そう。

第3表は、俯角 30° 、ロール角 0° 、高さ 720mm の場合である。

Case 1 は初期値 $\hat{q}(0)$ をほぼ正確な値、すなわち、

$$\hat{q}_{0,1} = \hat{\alpha}_0 \sim N(25\pi/180, 1) \quad (33)$$

Case 2 では

$$\hat{q}_{0,1} = \hat{\alpha}_0 \sim N(20\pi/180, 1) \quad (34)$$

他の状態変数は

$$\hat{q}_{0,2} = \hat{\psi}_0 \sim N(0, 1) \quad (35)$$

$$\hat{q}_{0,3} = \hat{h}_0 \sim N(700, 300^2) \quad (36)$$

ここで、角度はラジアン [rad] 高さは [mm] である。

各々のケースで50回テストを行い、その結果を第3表にまとめている。“No hit” は、時間リミット(10秒間)の間に、リセットを繰り返して、収束しなかった場合を示す。実験室は普通の部屋で、視野の上部に壁やドア、下部に床面が写る。時間はプログラムで自動計測された値である。

第3表 我々の最初のアロリズムの性能

	Case 1	Case 2
10秒間 “no hit” のケース	6/50	44/50
HITした場合の	0.958	0.260
HIT するまでの平均時間 [sec]		

この結果からは、良い初期値を選ぶのは、姿勢を知っているときでなければ、非常に難しいことがわかる。

初期値を、第4表のようにしたら、数秒で、正しい状態推定ができるように適応した。

第4表 壁を見るとき初期値

	俯角 [rad]	ロール角 [rad]	高さ [mm]
平均	$\pi/2$	0	1000
分散	1	1	100^2

4.10 問題ごとの初期値の提案値

4.6章の Step 1 と Step 2.5 は次のアルゴリズムである。

Step 1. 初期値の設定 一様乱数で初期値を生成。

$$\underline{\alpha}_0 \leq q_{1,0} \leq \overline{\alpha}_0 \quad (37)$$

$$\underline{\psi}_0 \leq q_{2,0} \leq \overline{\psi}_0 \quad (38)$$

$$\underline{h}_0 \leq q_{3,0} \leq \overline{h}_0 \quad (39)$$

対角行列 \hat{P} は、1 サイクル中の変数の変化を物理的に考えて設定。

Step 2.5 リセット条件を確認 Step 2.5 で、不等式 (37)-(39) および、次の等式をチェックする。

$$N_{valid} \geq \overline{N_{valid}} \quad (40)$$

$$N_{far} \leq \overline{N_{far}} \quad (41)$$

ここに、 N_{valid} は、深度データの中で、基準となる平面領域のデータの割合である。また、 N_{far} は、得られている床（あるいは壁）よりも遠いところのデータの割合である。

姿勢パラメータが真値に近ければ、データの大部分がその平面上にあると判定される。そのため、この値は、姿勢パラメータの良さを示す指標となる。定数 $\overline{N_{valid}}$ 及び $\overline{N_{far}}$ は、与えられた問題によって決定すべきである。そのため、事前の準備実験が必要である。もし、満たされない条件が1 つでもあれば、現在の推定値は無効であると判断され、リセットされる。

4.10.1 提案アルゴリズムの数値実験

4.8.2 章で提案したアルゴリズムの数値実験を行う。初期値を真値に近いところに設定した Case 1 と、かなり離れたところに設定した Case 2 をそれぞれ 50 回ずつ実行した。両方のケースにおいて、結果を第 5 表に示す。

$\overline{N_{valid}}$ を 0.4、 $\overline{N_{far}}$ を 0.1 にした以外のすべての条件は、第 3 表と同じである。

第 5 表 新しいアルゴリズムの性能

	Case 1	Case 2
10 秒間 “no hit” のケース	0/50	1/50
HIT した場合の	2.318	1.981
HIT するまでの平均時間 [sec]		

この表では、ケース 1 と 2 において、良い初期値を当てる頻度はあまり変わらない。すなわち、このアルゴリズムはロバストであるといえる。第 5 表 (新) と第 3 表 (旧) を比較すると、Case 1 では、検出速度が悪い。しかし、第 5 表での “no hit” は、第 3 表より少ない。Case 2 では、第 5 表は、第 3 表に比べて、“no hit” のケースが劇的に減少している。言い換えれば、姿勢の初期値が全く不明なときは、第 3 表のアルゴリズムは使えず、第 5 表の新しいアルゴリズムしか使えないといえよう。

4.10.2 歩行者

同じプログラムで、設定値を変えれば、次の 2 つが検知できる。

Prog1 床面・路面を検知。その場合、俯角を 20° 程度に設定してスタートするとよい。床面にある数 cm の障害物が検知できる。

Prog2 壁面を検知。その場合、角度を 90° にしてスタートするとよい。壁面までの距離が求められる。

第 6 表 不等式 (37)-(41) に用いられる定数

項目	Prog1	Prog2
$\underline{\alpha}_0$	20°	70°
$\overline{\alpha}_0$	50°	110°
$\underline{\psi}_0$	-30°	-30°
$\overline{\psi}_0$	30°	30°
\underline{h}_0	20 [cm]	20 [cm]
\overline{h}_0	400 [cm]	500 [cm]
$\overline{N_{valid}}$	0.2	0.2
$\overline{N_{far}}$	0.2	0.2

Prog1 は、第 13 図、第 14 図に対応し、Prog2 は、第 15 図、第 16 図に対応する。これらの図は実時間処理を行う PC の異なるウィンドウから取得したものである ([17] より)。

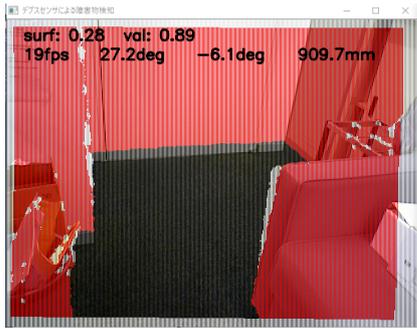
図の中の説明を行う。図中の一番上には、2 つの数値が示される。左 (surf) は、主要平面の部分であると判定された割合が示される。第 14 表では、0.26 となっている。右 (val) は、画像中の有効画素の割合を示す。センサが何かの物体に近すぎたら、有効画素は少ししかなくなる。もしその値が小さすぎたら、“few valid data” がこの数値の右に表示される。

2 行目には、4 つの数値が示される。左の値は、FPS (Frames Per Second) である。左から 2 つ目の数値は、推定されたピッチ角 α の値である。3 番目の値は、推定されたロール角 ψ の値である。4 つ目の値は、推定された高さ h である。

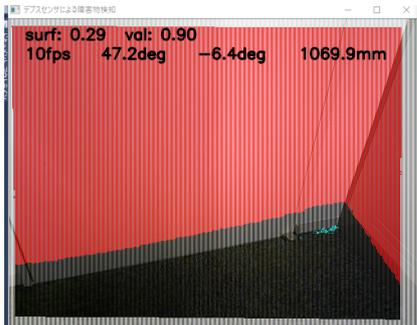
図中、主要平面 (床や壁) は、色付けされず、灰色である。赤い画素は、主要平面よりも近い部分である。主要平面が床の場合、赤いところは何か床の上にある障害物ということになる。そのため、歩行者は注意をする必要がある。

青い画素は、主要平面よりも遠いところである。主要平面が床の場合、青い部分は穴や溝、下降階段などということになり、十分な注意が必要である。主要平面が壁面の場合 (第 15 図 と 第 16 図) は、壁がなく進める部分である ([17] より)。ここの図には、青の部分が現れていない。

これらの図を見ると、主要平面は異なる様子で検出されている。第 13 図では、主要平面は床で、第 15 図



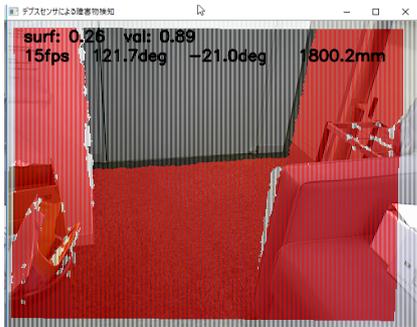
第 13 図 Prog1: 第 6 表に示した閾値により検出された結果



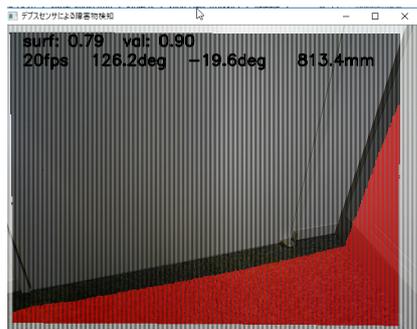
第 14 図 Prog1: さらに壁に近づいた場合

ではそれはセンサの前のドアである。

第 14 図と第 16 図は、センサがドアに接近した時の結果を示す。これは第 15 図の h を見てもわかる。最初は 1800.2mm であるが、第 16 図では、813.4mm となっている ([17] より)。



第 15 図 Prog2: 第 6 表に示す閾値を用いて検出した結果



第 16 図 Prog2: さらにドアに近づいた場合

4.10.3 散らかった場所での高さや距離を測る装置としての利用

このシステムは、掲示物や装着物がたくさんあるような壁面までの距離を測るために用いることができる。また、路面に工事中の盛り土があったり穴があったりするような場所の上方に移動カメラがあって、常時高度をモニタしたいような場合にも用いることができる。

第 7 表 不等式 (37)-(41) に使用されるパラメータ 掲示物等がいろいろあって散らかった壁面に対して、その壁面までの距離が計測できる。

項目	値
α_0	-50°
$\bar{\alpha}_0$	50°
ψ_0	-30°
$\bar{\psi}_0$	30°
$\frac{h_0}{\bar{h}_0}$	$d \times [\cos \gamma \pi / 180, 1] - r$
	$d \times [\cos \gamma \pi / 180, 1] + r$
$\frac{N_{valid}}{N_{far}}$	0.2
	0.2

初期値は第 7 表に示す。 γ が、センサ方向と鉛直面との間の最大角度とすると、4 つのケースで実験を行った。 d が深度画像における、事前に決めた中心点までの距離 (例えば $(iW/4, jH/4); i, j = 1, 2, 3$) で、ランダムに選んでいる。乱数 r の定義域は、環境に応じて適当に決める。ここでは、 $\gamma = 50^\circ$ とした。

また床面に物が散乱していて、最短距離を計測するところにセンサを設置できないような場合にも、距離の計測ができる。災害現場などで、クレーンで上にセンサを持ち上げて計測するような場合が想定できる。

第 8 表 計測結果

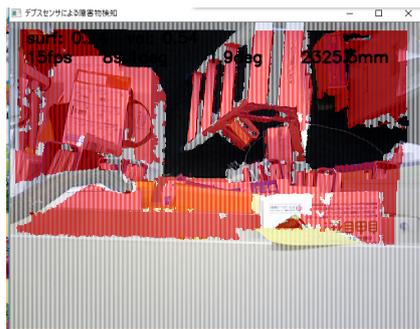
No.	場所	本システム	真値
1	散らかった床	2,325	2,321
2	散らかった壁	4,471	4,424
3	ソファ (床)	561	(948)
4	床	944	948

表中の“Real value” は、レーザー測定器 LD-500 (STABILA) によった。

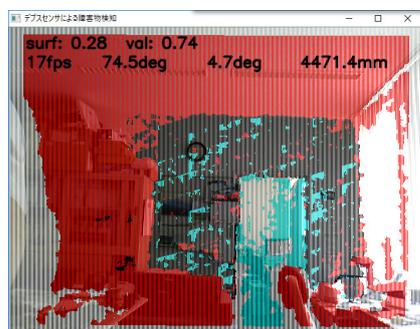
次に第 17 図のところで、散らかった床面までの距離を計測する。第 8 表の No.3 に対応する。これも正しく計測できている ([17] より)。

第 8 表の No.4 と第 18 図は、遠方の壁面までの距離を測っている ([17] より)。

センサの正視方向と対称面が角度 γ のとき、センサと面の距離は $h \sin \gamma \pi / 180$ である。しかし、この角度



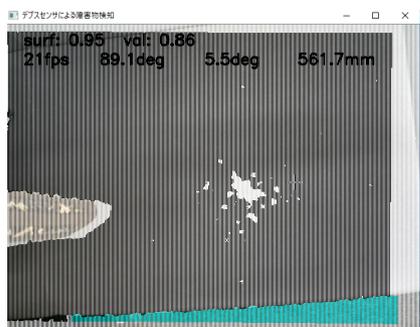
第 17 図 高いところから散乱した床面を見たもの。床部分は黒色で、障害物は赤が塗られている。手前の灰色部分は、センサが取り付けられている書架の棚で、非常に近いため灰色（データ取得不能）になっている



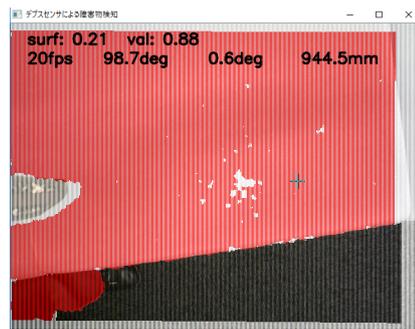
第 18 図 散らかった壁面の検出。壁面は赤や青に塗られていない部分

は未知なので、ランダムな値が適用され、さらに、区間 $[-r, r]$ の間の乱数を加えた値が生成される。

もう 1 つ利用方法を示す。穴がないことがわかっているとき、穴や溝と判定されたところを、目的の平面とする。No.3, 4 (第 19 図と第 20 図に相当) ではまず大きな平面としてソファの座面が検出されている。同時に、床面は青くなっている。しかし、青に相当する部分がないという情報から、その部分が床面になるようにリセットされ、結局ソファが、近い部分の障害物として検出される ([17] より)。



第 19 図 適応する前のソファと床面



第 20 図 適応後のソファと床面

5. おわりに

本稿では、筆者の非線形カルマンフィルタの身近な移動体の位置・姿勢推定への過去の研究を 1 つの原稿にまとめ、若干の整理をしたものである。

最後の初期値の問題は、非線形カルマンフィルタの教科書にあまり書かれていない初期値の問題を取り上げたものとなっている。非線形カルマンフィルタは線形近似のため、状態変数が真値から大きく外れているときには収束もしない可能性がある。特に、本稿で扱ったようなデータの取捨選択を伴うような問題ではその問題は重要である点を強調した。

近年は、多くのプログラムが Open ソースとして一般公開されている。自己位置推定や SLAM なども例外ではない。もちろん、そのようなプログラムが安心して使えるのであればそれを使うほうが効率が良いだろう。

本稿で紹介したようなアルゴリズムは、SLAM や自己位置推定を行いつつ、付随した検出を行うようなものになっているため、Open ソースを利用する際にはそれに大きく手を加えなければならないだろう。場合によってはそうすることは容易ではないかもしれない。利用できるプログラムが、どれくらい手を加えやすいものかによって、扱えるアルゴリズムも異なってくる。そういうソフトウェアの利用を前提にする際には既存のソフトウェアに手が加えられない場合には、アルゴリズム自体を考え直す必要があるかもしれない。

参考文献

- [1] 中村, 齋藤, 宮城: KINECT for Windows SDK プログラミング C++ 編. 秀和システム (2012)
- [2] M. Tanaka, H. Hirano, S. Onishi, T. Umetani and M. Wada, Localization of a Moving Robot by Sensor Fusion, *Proc. of RISP International Workshop on Nonlinear Circuits*, March 3-5, pp. 556-559 (2010)
- [3] T. Kuwata, M. Tanaka, M. Wada, T. Umetani and M. Ito: Localization of Segway RMP, *Proc. of SICE Annual Conference*, pp. 1675-1680 (2011)
- [4] M. Tanaka, M. Wada, T. Umetani and M. Ito: Detection of mobile objects for outdoor navigation robots,

- Proc. of 43rd Stochastic Systems Symposium*, Shiga, pp. 140–147 (2012)
- [5] M. Tanaka, M. Wada, T. Umetani, M. Ito: Detection of Mobile Objects by Mixture PDF Model for Mobile Robots, システム制御情報学会論文誌, 第 25 巻第 11 号, pp. 308-315. Doi: 10.5687/iscie.25.308 (2012)
- [6] M. Tanaka: Robust parameter estimation of road condition by Kinect sensor, *Proc. of SICE Annual Conference*, pp. 197–202 (2012)
- [7] M. Tanaka and H. Kaku: Inspection of Ground Condition for a Mobility Scooter by Kinect Sensor, *Proc. of 2012 RISP International Workshop on Nonlinear Circuits, Communications and Signal Processing*, pp. 627-630 (2012)
- [8] 田中: 距離センサと推定アルゴリズムの併用による検知システム, 第 57 回システム制御情報学会研究発表講演会チュートリアル講演, pp. 1–8 (2013)
- [9] M. Tanaka: State Estimation of Depth Sensor's Postures Attached to an Unstable Dynamic Object, *Proc. of 44th Stochastic Systems Symposium*, pp. 44–50 (2012)
- [10] M. Tanaka: State estimation approach for depth sensor's posture attached to a vehicle or a human body, システム制御情報学会論文誌, Vol. 26, No. 11, pp. 398–406 (2013)
- [11] 田中: デプスセンサによる路面と壁面の検知方法, *Proc. of Vision Engineering Workshop 2013 (ViEW 2013)*, IS1-E4 (2013)
- [12] M. Tanaka: Surface Detection in a View of a Depth Sensor, *Proc. of 2014 International Workshop on Nonlinear Circuits, Communications and Signal Processing (NCSP'14)*, pp.385–388 (2014)
- [13] 田中: デプスセンサによる姿勢推定と周囲環境認識, 第 58 回システム制御情報学会研究発表講演会, 316–4 (2014)
- [14] 田中: 深度センサのモデルとその応用, システム/制御/情報, Vol. 58, No.8, pp. 339-344 (2014)
- [15] M. Tanaka: Surface Detection in a View of a Depth Sensor, *Proc. of 2014 RISP International Workshop on Nonlinear Circuits, Communications and Signal Processing*, pp.385–388 (2014)
- [16] M. Tanaka: Ground Surface Estimation and Environmental Recognition by a Small Mobile Depth Sensor, *Proc. of 48th Stochastic Systems Symposium*, pp. 48–55 (2017)
- [17] M. Tanaka: On the Initial Guess of Posture of Mobile Depth Sensor for Detecting the Primary Surface in the Environment, *Proc. of 49th Stochastic Systems Symposium*, pp. 119–124 (2018)
- [18] M. Tanaka: Estimation of the Posture of Mobile Depth Sensor for Detecting the Ground and Walls in Terms of Initial Values, システム制御情報学会論文誌, Vol. 32, No. 1, pp. 39-46 (2019)
- [19] H. Igarashi, T. Saito, T. Kinjyo and F. Matsuno: Development of an autonomous inverted pendulum mobile robot for outdoor environment, *Proc. of SICE Annual Conference*, pp. 2282–2285, 2008
- [20] S. Thrun, W. Burgard and D. Fox: *Probabilistic Robotics*, MIT Press (2005)
- [21] M. Montemerlo and S. Thrun: *FastSLAM: A Scalable Method For The Simultaneous Localization and Mapping Problem In Robotics*, Springer (2007)
- [22] D. G. Lowe: Distinctive image features from scale-invariant keypoints, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 60, No. 2, pp. 91–110 (2004)
- [23] H. Bay, A. Ess, T. Tuytelaars and L. V. Gool: SURF: Speeded up robust features, *Computer Vision and Image Understanding (CVIU)*, Vol. 110, No. 3, pp. 346–359 (2008)
- [24] B. Ristic, S. Arulampalam and N. Gordon: *Beyond the Kalman Filter – Particle Filters for Tracking Applications*, Artech House, Boston and London (2004)
- [25] R. Szeliski: *Computer Vision – Algorithms and Applications*, Springer UK (2011)
- [26] 片山: 非線形カルマンフィルタ, 朝倉書店 (2011)
- [27] 片山: 新版 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店 (2000)
- [28] A. Doucet, N. De Freitas, N.J. Gordon: *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer (2001)
- [29] D. Simon: *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*, Wiley (2006)
- [30] C. M. Bishop: *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer (2006)

著者略歴

た な か ま さ ひ ろ
田 中 雅 博 (正会員)



1956年5月生。1981年3月京都大学大学院工学研究科数理工学専攻修士課程修了。島津製作所, 滋賀大学経済短期大学部助教授, IIASA 研究員, 岡山大学工学部情報工学科助教授を経て, 1999年7月より甲南大学理学部教授。現在, 知能情報学部教授。工学博士。状態推定, 画像認識, 移動ロボット, 人工知能を用いた応用研究に従事。近年は, 特に Kinect をはじめとする深度センサやレーザー距離センサにディープラーニングによる認識を活かした応用システム開発を行っており, 高齢者や社会弱者への貢献を目指す。計測自動制御学会, 電気学会, 日本機械学会, 日本ロボット学会, IEEE などの会員。

確率可積分系試論

赤堀 次郎*

1. プロローグ

筆者は SSS40 回記念号で確率ハミルトン系についての記事を書いている [5]. その時実は、確率可積分系について書くつもりだったのだが、時間が足りず、中途半端なものになってしまった。今回は再挑戦させていただけるということで、タイトルだけを先に決めて、張り切って書き出してみたのだけれども、あれこれ計算してみて勘違いしていたことがあったり、ずっと読むのをサボっていた Bismut の大著 [1] をついに正対して読んでみたら私の考えていたことの核心がそこに書いてあったので少し落胆したりということがあったりで、締め切りに大幅に遅れてしまい、杉本先生には大変なご迷惑をおかけしてしまった。

そんなこんなで、本稿は、当初考えていたプラン——もっと最先端の量子戸田格子とか KPZ 方程式と絡めたもの——を変更して、Bismut の本 [1] の中で私が考えていたことに対応する部分をより平易に説明するということを目的とするものになった。そもそも [1] は、500 ページを超える大著で、フランス語で、かつ幾何学と確率論の両方の言葉が縦横に使われており、ほとんど読む人がおらず、そこに書いてあることはほとんど研究者間で共有されていない、と思われるので、そういうことも意味があると思いたい。

私が考えていたこと、とは

- 可積分確率ハミルトン系から出発して、ラグランジアンを (パラメータ付き) 確率微分方程式の解に関する作用積分の期待値として構成すること
- 可積分確率ハミルトン系の次元減少を利用した数値解析

なのだが、後者はここでは論じない。セクション 4. で我々の確率ハミルトン系をどうして可積分系と呼ぶべきか、ということの言い訳を書くにとどめている。

前者については、結局 [1] の結果がそれを包含している、あるいはそこから出発した方が良く、ということで私が翻案し (換骨奪胎し) た内容がセクション 3. で論じられている。そこでは、ブラウン運動の Wong-Zakai 近似を用いて、確率解析力学を通常の解析力学に還元する手法が紹介されている。重要なことは、作用積分が期待

値になっても、得られるハミルトン系は同じであるということである。

セクション 2. では、セクション 3. 以降の議論の補助のため、古典的解析力学のまとめを書いた。実際には学生向けに書いたノートをそのまま引き写したのだけれども。

(注意 1) ここでの数学的議論は全体的に非常にアヤシイものとなっています。気になる方はぜひご自分で証明しなおすことをお勧めします。

2. 解析力学の復習

2.1 ラグラジュ力学

$L: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{2d} \rightarrow \mathbf{R}$ を滑らかな狭義凸関数とする。解析力学においては以下で定義される「作用積分」

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt, \quad (1)$$

を様々な制約下で最小にする軌跡 $\mathbf{x}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}^d$ を決定することが問題となる。関数 L はラグランジアンと呼ばれている。以下では

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1. \quad (2)$$

という制約下の問題を考える。

x が唯一の最適解、つまり作用積分 (1) を最小にする軌跡であるとしよう。この時、任意の正数 ϵ および任意の滑らかな関数 \mathbf{h} で

$$\mathbf{h}(t_0) = \mathbf{h}(t_1) = 0, \quad (3)$$

を満たすものに対し、

$$\mathcal{L}(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h}) - \mathcal{L}(\mathbf{x}) > 0$$

となる。条件 (3) は条件 (2) によってもたらされることに注意しよう。テイラー展開を \mathcal{L} についてしてみよ、しかしこれは式 (1) をみれば L について、ということになる。

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(\nabla_{\mathbf{x}} L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{h}(t) \right. \\ & \quad \left. + \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \dot{\mathbf{h}}(t) \right) dt + o(\epsilon) \quad (4) \\ & = \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(\nabla_{\mathbf{x}} L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \right. \end{aligned}$$

* 立命館大学 理工学部

Key Words: Stochastic Integrable System,

$$-\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{x}}}L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\Big)\mathbf{h}(t)dt + o(\epsilon) > 0. \quad (5)$$

(4) から (5) へは、部分積分を行った。条件 (3) によって、境界での値は 0 になっている。\$\epsilon > 0\$ と関数 \$\mathbf{h}\$ は任意だったの

$$\nabla_{\mathbf{x}}L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) - \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{x}}}L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = 0. \quad (6)$$

でなければならない。

この \$x\$ に関する方程式はオイラー＝ラグランジュ方程式 (Euler-Lagrange equation) と呼ばれる。具体的な \$L\$ が与えられれば、オイラー＝ラグランジュ方程式は \$x\$ に関する 2 階の常微分方程式を与える。例えば、

$$L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 - V(\mathbf{x}) \quad (7)$$

であるとき、ニュートンの第 2 法則

$$-\nabla V(\mathbf{x}) = m\ddot{\mathbf{x}}, \quad (8)$$

が得られる。

2.2 ハミルトン力学

ラグランジュ力学と等値ではあるが、対称性を記述するのにより適しているのは以下に述べるハミルトン力学である。

\$\mathbf{x}, \mathbf{p} \in \mathbf{R}^d\$ に対して

$$H_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}; \dot{\mathbf{x}}) := \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p} - L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (9)$$

とおく。ここでは、当面 \$\dot{\mathbf{x}}\$ を独立変数と思う。そして、ハミルトニアン \$H\$ を

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sup_{\dot{\mathbf{x}}} H_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}; \dot{\mathbf{x}}), \quad (10)$$

で定義する。すなわち、ハミルトニアンとは、ラグランジアン \$L(t, \mathbf{x}, \cdot)\$ のルジャンドル変換による像である。

もし、\$\dot{\mathbf{x}}\$ が (10) において最小値をあたえるとすると、

$$\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{x}}}L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}). \quad (11)$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{p}}H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \nabla_{\mathbf{p}}H_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}; \nabla_{\dot{\mathbf{x}}}L^{-1}(t, \mathbf{x})(\mathbf{p})) \\ &+ \nabla_{\dot{\mathbf{x}}}H_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}; \nabla_{\dot{\mathbf{x}}}L^{-1}(t, \mathbf{x})(\mathbf{p}))\nabla_{\mathbf{p}}\nabla_{\dot{\mathbf{x}}}L^{-1}(t, \mathbf{x})(\mathbf{p}) \\ &= \dot{\mathbf{x}} + 0 \end{aligned} \quad (12)$$

となる。また、オイラー＝ラグランジュ方程式 (6) の解 \$(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\$ を代入することによって

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{x}}}L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \\ &= \nabla_{\mathbf{x}}L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) - \nabla_{\mathbf{x}}H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \end{aligned} \quad (13)$$

が得られる。こうして得られた (12) と (13) からなる連立の 1 階常微分方程式系は、ハミルトン (力学) 系と呼ばれる。

逆に、ハミルトン系からまた、オイラー＝ラグランジュ方程式を導出することもできる。

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sup_{\mathbf{p}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{y} - H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}))$$

で改めて \$L\$ を定義する。このとき

$$\mathbf{y}(t) = \nabla_{\mathbf{p}}H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (14)$$

であるので

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}}L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}(t)) &= \nabla_{\mathbf{x}}H(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}(t)) \\ &= \dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{x}}}L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)), \end{aligned} \quad (15)$$

となり、オイラー＝ラグランジュ方程式が得られる。

また、もっと直接的に、

$$\tilde{L}(t, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) := \dot{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{p} - H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (16)$$

とおくことでオイラー＝ラグランジュ方程式を得ることもできる。ただしここで \$\mathbf{z} := (\mathbf{x}, \mathbf{p})\$ とした。

2.3 ポントリャーギンの最大値原理

工学や経済学、あるいは科学一般において多くの問題が上で述べた変分問題を一般化した最適制御の問題として定式化される。典型的には、

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) := \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt + F(\mathbf{x}(t_1)) \quad (17)$$

を制約条件

$$\dot{\mathbf{x}} = \mu(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (18)$$

の下で最小にする \$\mathbf{u}^*\$ を見つけるという問題として定式化される。ここで \$f, F, \mu, \mathbf{x}_0\$ は、外生的に与えられる関数・定数である。

もし \$\mu\$ が滑らかな逆関数をもつとすると、この問題は上述の解析力学の枠組みに落ちる。より一般の場合は、以下に述べるポントリャーギンの最大値原理による特徴づけができる。

【定理 1】 (Pontryagin) (適当な正則性の仮定の下で) 関数の組

$$(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))_{t \in [t_0, t_1]}$$

が制約条件 (18) の下での (17) を最小にする必要十分条件は

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \nabla_{\mathbf{p}}H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(t) &= -\nabla_{\mathbf{x}}H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t)), \\ \mathbf{p}(t_1) &= -\nabla F(\mathbf{x}_{t_1}^*), \end{aligned} \quad (20)$$

および

$$H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t)) = \mathbf{p} \cdot \mu(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) - f(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)),$$

で与えられる。ただしここで

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) := \max_{\mathbf{u}} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}))$$

である。

2.4 可積分系

2.4.1 ハミルトン系の求積

ここでは、「求積」(quadrature)とは、常微分方程式の解を(有限回の不定積分を用いて)求めることであり、微分方程式が「可積分」であるとは求積可能であるということの意味している。「求積」の意味が曖昧なので可積分であることの定義もいろいろありうるが、解析力学の文脈では、ある微分方程式が「第一積分」(first integral)と呼ばれる保存量を十分たくさんもてば可積分であるとされている。それは大体次のような理論上の手続きに依拠している。

- 1次元の常微分方程式は求積できる(ということにする)。
- 高次元の方程式は、第一積分によって次元を1つ下げることができる(ことになっている)。
- n 次元の問題であれば、 n 個の線形独立な第一積分が見つければ、次元は1次元まで落ちて、求積できる。(12)と(13)、あるいは(19)と(20)からなるハミルトン系の場合、第一積分とは、

$$F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = 0$$

となる \mathbf{R}^{2n+1} 上の滑らかな関数 F のことである。ある関数が(時間斉次的な)ハミルトン系の第一積分であるかどうかは、ポアソン括弧(Poisson Bracket)によって判定できる： \mathbf{R}^{2d} 上の滑らかな関数 $F = F(x, y)$ と $G = G(x, y)$ のポアソン括弧(Poisson Bracket)とは、

$$\{F, G\} = \nabla_x F \cdot \nabla_x G - \nabla_y F \cdot \nabla_y G$$

で与えられる関数である。ある関数 F がハミルトニアン H によるハミルトン系の第一積分であることの必要十分条件が $\{H, F\} = 0$ であることは容易に確かめられる。

2.4.2 ハミルトンベクトル場

$(x(t), y(t))$ を以下のハミルトン系の解とする：

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= \nabla_y H(x_t, y_t) \\ \dot{y}_t &= -\nabla_x H(x_t, y_t) \end{aligned}$$

ここで $z = (x, y)$ と置けば、上式は

$$\dot{z}_t = J \nabla_z H(z_t)$$

と書ける。ただしここで

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

である。ベクトル場 $J \nabla_z H$ は H の「ハミルトンベクトル場」と呼ばれており、しばしば X_H と書かれる。次の事実は容易に確かめることができる：

$$X_{\{F, G\}} = [X_F, X_G]. \quad (21)$$

右辺は、リー括弧、つまり $X_F X_G - X_G X_F$ である。

以下にハミルトン系の可積分性に関する重要な事実を列記する。

- \mathbf{R}^{2n} 上のハミルトン系が可積分であることの必要十分条件は H 自身を含めて n 個の線形独立な第一積分をもつことである。
- 第一積分のハミルトンベクトル場は互いに可換である：第一積分たちを $f_i, i = 1, \dots, d$ としたとき、 $[X_{f_i}, X_{f_j}] = 0$ 。

これらは、第4.節で確率可積分性を議論するとき用いられる。

3. Bismut の確率ハミルトン系

3.1 経路レベルでの解析

H_0, H_1, \dots, H_d を \mathbf{R}^{2d} 上の滑らかな狭義凸関数とし、 L_0, L_1, \dots, L_d をこれらからルジャンドル変換で得られる関数とする。狭義凸性を仮定したのでこの L たちをもう一度ルジャンドル変換をすると H たちに戻ることに注意しよう。

区分的に滑らかな関数 $w \equiv (w^0, \dots, w^d) : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^{d+1}$ と $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv (x, y_0, \dots, y_d) \in \mathbf{R}^{d(d+1)}$ に対し、

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t; w) := \sum_{i=0}^d L_i(\mathbf{x}, y_i) \dot{w}_t^i,$$

と置き、 $0 < t_0 < t_1$ と \mathbf{R}^d 上の滑らかな関数 F に対し次のような作用積分を考える：

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; t_0, t_1, w) := \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{L}(\mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s), s; w) ds + F(\mathbf{x}(t_1)). \quad (22)$$

ここで、制約条件は $t \in [t_0, t_1]$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{y}(s) \dot{w}_s ds \\ &\equiv \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^d \int_{t_0}^t y_i(s) \dot{w}_s^i ds \end{aligned} \quad (23)$$

で与えられるものとする。ここで $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^d$ は固定された定数である。

制約(23)の下で作用積分(22)を最小にする経路 $\mathbf{x}^* : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}^d$ with the constraint が、仮にただ一つであるとすれば、ポントリャーギンの最大値原理(定理1)より、 $t_0 < t < t_1$ において

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \nabla_p \mathcal{H}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{y}^*(t)) \quad (24)$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\nabla_x \mathcal{H}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{y}^*(t)), \quad (25)$$

および、初期終端条件

$$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{p}(t_1) = -\nabla F(\mathbf{x}^*(t_1)) \quad (26)$$

が成立する. ただしここで

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \dot{w}_t \rangle - \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t; w)$$

であり, 各 $t \in (t_0, t_1)$ に対して $y^*(t)$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{y}^*(t)) \\ = \max_{\mathbf{y}} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (27)$$

を満たす. 今の場合には

$$\nabla_{y_i} \mathcal{H} = w_t^i (\mathbf{p} - \nabla_y L^i(\mathbf{x}, y_i))$$

であるので,

$$y_i^* = (\nabla_y L^i)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

となり, したがって

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{y}} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y}) &= \max_{\mathbf{y}} \sum_i (\langle \mathbf{p}, y_i \rangle - L_i(\mathbf{x}, y_i)) \dot{w}_t^i \\ &= \sum_i \max_{y_i} (\langle \mathbf{p}, y_i \rangle - L_i(\mathbf{x}, y_i)) \dot{w}_t^i \\ &= \sum_i H_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \dot{w}_t^i \end{aligned}$$

となる. よってハミルトン系 (24), (25) は次のように書き換えられる.

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \sum_i \nabla_p H_i(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t)) \dot{w}_t^i \quad (28)$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\sum_i \nabla_x H_i(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t)) \dot{w}_t^i. \quad (29)$$

この議論は w がブラウン運動の Wong-Zakai 近似¹であるときにも正しい. ただし, 終端条件 (26) を満たす適合過程が存在するという仮定はかなり強い制約となる. Wong-Zakai 近似に関しては, 適当な θ に関する正則性を仮定すれば

$$\int_{u_0}^{u_1} \theta(s) \dot{w}_s^n ds$$

がストラトノビッチ型の確率積分

$$\int_{u_0}^{u_1} \theta(s) \circ dW_s,$$

に確率 1 で収束するということがよく知られている. (参考文献)

ストラトノビッチ積分について書く. 伊藤の公式これを用いれば, 適当な条件の下で, 次が言える.

[定理 2] (Bismut (1982)) 制約条件

$$X_t = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t Y_s^0 ds + \sum_i \int_{t_0}^t Y_s^i \circ dW_s^i, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

(Y_t^0, \dots, Y_t^d は適合過程) の下での作用積分

$$\int_{t_0}^{t_1} L_0(X_s, Y_s^0) ds + \sum_i \int_{t_0}^{t_1} L_i(X_s, Y_s^i) \circ dW_s^i + F(X_{t_1})$$

が $X^* \equiv X((Y^0)^*, \dots, (Y^d)^*)$ において確率 1 で極小となるならば, X^* は以下の前進後退確率微分方程式 (確率ハミルトン系) の解:

$$\begin{aligned} X_t &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \partial_y H_0(X_s, P_s) ds \\ &\quad + \sum_i \int_{t_0}^t \partial_y H_i(X_s, P_s) \circ dW_s^i \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} P_t &= -\nabla F(X(t_1)) - \int_t^{t_1} \partial_x H_0(X_s, P_s) ds \\ &\quad - \sum_i \int_t^{t_1} \partial_x H_i(X_s, P_s) \circ dW_s^i, \end{aligned} \quad (31)$$

$t_0 \leq t \leq t_1,$

$$(Y_t^i)^* = (\nabla_y L^i)^{-1}(X_t, P_t), \quad i = 0, 1, \dots, d. \quad (32)$$

定理 2 の逆も適当な条件下で成立する.

(注意 2) 終端条件 (32) を満たす確率ハミルトン系 (30), (31) の存在は, 以下で考えるような確率可積分系の場合には必ずしも保証されない.

3.1.1 平均量の解析

上で行った経路ごとの解析では, 古典的解析力学を駆使することで, 最大値原理の類似 (定理 2) を得ることができた. しかし, 適合性の問題については十分な解答を与えていない. そこで本節では, 作用積分が期待値で与えられる場合に最大値原理がどう変わるかについて考察してみる.

($\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}$) を有限確率空間とし

$$\{\mathcal{F}_t\}_{t=t_0, t_0+\Delta, \dots, t_0+N\Delta=t_1}$$

をその上のフィルトレーションとするここで Δ は正の定数である. 最後に $\Delta \rightarrow 0$ の極限を考察する.

$w \equiv (w^0, \dots, w^d)$ を $d+1$ 次元の $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合過程とし,

$$\dot{w}_t^i := \frac{\tilde{w}_{t+\Delta} - \tilde{w}_{t-\Delta}}{2\Delta}, \quad (33)$$

とおく. ここで \tilde{w}_t for $t \in [t_0, t_1]$ は $w_{t+k\Delta}$, $k=0, 1, \dots, N$ の線形補間である.

ラグランジアンを

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t; w) := \sum_{i=0}^d L_i(\mathbf{x}, y_i) \dot{w}_t^i,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv (x, y_0, \dots, y_d) \in \mathbf{R}^{d(d+1)}.$$

で定義し, 与えられた \mathbf{R}^d 上の滑らかな関数 F に対し, 次の作用積分を考える.

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; t_0, t_1, w)$$

¹??

$$\begin{aligned}
& := \mathbf{E} \left[\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{L}(\mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s), s; w) ds + F(\mathbf{x}(t_1)) \right] \quad (34) \\
& = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{L}(\mathbf{x}(s, \omega), \mathbf{y}(s, \omega), s; w(\omega)) ds \\
& \quad + F(\mathbf{x}(t_1, \omega))
\end{aligned}$$

制約条件は以下で与える。各 $t \in [t_0, t_1]$ および $\omega \in \Omega$ に対し

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t, \omega) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{y}(s, \omega) \dot{w}_s(\omega) ds \\
&\equiv \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^d \int_{t_0}^t y_i(s, \omega) \dot{w}_s^i(\omega) ds. \quad (35)
\end{aligned}$$

いままでと同様、 $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^d$ は固定された定数である。

確率変数 $(\mathbf{x}(\omega), \mathbf{y}(\omega))$ を $d(d+1) \times \#\Omega$ 次元の変数とみなせばポントリャーギンの最大値原理 (定理 1) が依然として適用可能である。制約条件 (23) の下で作用積分 (22) の極値を与える経路 $\mathbf{x}^* : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}^{d \times \#\Omega}$ は $\mathbf{R}^{2(d\#\Omega)}$ でのハミルトン系

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}^*(t, \omega) &= \nabla_{\mathbf{p}(\omega)} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}^*(t, \omega), \mathbf{p}(t, \omega), \mathbf{y}^*(t, \omega)) \quad (36) \\
\dot{\mathbf{p}}(t, \omega) &= -\nabla_{\mathbf{x}(\omega)} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}^*(t, \omega), \mathbf{p}(t, \omega), \mathbf{y}^*(t, \omega)) \quad (37)
\end{aligned}$$

を $t_0 < t < t_1$ および $\omega \in \Omega$ に対して満たし、かつ初期-終端条件

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^*(t_0) &= \mathbf{x}_0 \quad (38) \\
\mathbf{p}(t_1, \omega) &= -\nabla F(\mathbf{x}^*(t_1, \omega)) \mathbf{P}(\{\omega\}) \quad (39)
\end{aligned}$$

を満たす。ただしここで

$$\begin{aligned}
& \mathcal{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y}) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) \\
& \quad \left(\left\langle \frac{\mathbf{p}(\omega)}{\mathbf{P}(\{\omega\})}, \mathbf{y}(\omega) \dot{w}_t(\omega) \right\rangle - \mathbf{L}(\mathbf{x}(\omega), \mathbf{y}(\omega), t; w) \right)
\end{aligned}$$

であり、各 $t \in (t_0, t_1)$ に対して $\mathbf{y}^*(t)$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{y}^*(t)) \\
= \max_{\mathbf{y}} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{y}) \quad (40)
\end{aligned}$$

を満たす。ここで各 t に対する $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{y}^*(t)$, および \mathbf{y} は、それぞれ $\mathbf{R}^{d \times \#\Omega}$, $\mathbf{R}^{d \times \#\Omega}$, $\mathbf{R}^{(d+1) \times \#\Omega}$, および $\mathbf{R}^{(d+1) \times \#\Omega}$ に値をとるものとみなしている。ここで、 $\mathbf{x}^* : [t_0, t_1] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ と、適合確率過程ともみなせることに注意しよう。

今の場合、

$$\nabla_{\mathbf{y}_i(\omega)} \mathcal{H} = \dot{w}_t^i(\omega) (\mathbf{p}(\omega) - \mathbf{P}(\{\omega\}) \nabla_{\mathbf{y}} L^i(\mathbf{x}(\omega), \mathbf{y}_i(\omega)))$$

となるので、経路ごとの解析の場合と同様の関係式

$$\mathbf{y}_i^*(\omega) = (\nabla_{\mathbf{y}} L^i)^{-1}(\mathbf{x}(\omega), \frac{\mathbf{p}(\omega)}{\mathbf{P}(\{\omega\})})$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}
& \max_{\mathbf{y}} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y}) \\
&= \max_{\mathbf{y}} \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) \sum_i \\
& \quad \left(\left\langle \frac{\mathbf{p}(\omega)}{\mathbf{P}(\{\omega\})}, \mathbf{y}_i(\omega) \right\rangle - L_i(\mathbf{x}(\omega), \mathbf{y}_i(\omega)) \right) \dot{w}_t^i \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) \sum_i \\
& \quad \max_{\mathbf{y}_i(\omega)} \left(\left\langle \frac{\mathbf{p}(\omega)}{\mathbf{P}(\{\omega\})}, \mathbf{y}_i(\omega) \right\rangle - L_i(\mathbf{x}(\omega), \mathbf{y}_i(\omega)) \right) \dot{w}_t^i(\omega) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) \sum_i H_i(\mathbf{x}(\omega), \frac{\mathbf{p}(\omega)}{\mathbf{P}(\{\omega\})}) \dot{w}_t^i(\omega)
\end{aligned}$$

を得る。そうすると、ハミルトン系 (24), (25) は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}^*(t, \omega) &= \sum_i \nabla_{\mathbf{p}} H_i(\mathbf{x}^*(t, \omega), \frac{\mathbf{p}(t, \omega)}{\mathbf{P}(\{\omega\})}) \dot{w}_t^i(\omega) \quad (41) \\
\dot{\mathbf{p}}(t, \omega) &= -\mathbf{P}(\{\omega\}) \sum_i \nabla_{\mathbf{x}} H_i(\mathbf{x}^*(t, \omega), \frac{\mathbf{p}(t, \omega)}{\mathbf{P}(\{\omega\})}) \dot{w}_t^i(\omega). \quad (42)
\end{aligned}$$

\mathbf{p} を改めて \mathbf{p}/\mathbf{P} と定義し、境界条件 (39) 下のハミルトン系 (41), (42) を積分形で書きなおせば

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^*(t, \omega) &= \mathbf{x}_0 \\
& \quad + \sum_i \int_{t_0}^t \nabla_{\mathbf{p}} H_i(\mathbf{x}^*(s, \omega), \mathbf{p}(s, \omega)) \dot{w}_s^i(\omega) ds, \\
\mathbf{p}(t, \omega) &= -\nabla F(\mathbf{x}^*(t_1, \omega)) \\
& \quad - \sum_i \int_t^{t_1} \nabla_{\mathbf{x}} H_i(\mathbf{x}^*(s, \omega), \mathbf{p}(s, \omega)) \dot{w}_s^i(\omega) ds
\end{aligned}$$

が得られる。つまり、経路ごとの議論で得られた (28) と (29) と同じ形の方程式が得られるのである。上の w をブラウン運動の Wong-Zakai 近似の離散近似と思えば、適当な極限操作の下で、次が得られる。

【定理 3】 (Bismut (1982)) 制約条件

$$X_t = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t Y_s^0 ds + \sum_i \int_{t_0}^t Y_s^i \circ dW_s^i, \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

(ただし Y_t^0, \dots, Y_t^d は適合過程) の下で

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left[\int_{t_0}^{t_1} L_0(X_s, Y_s^0) ds \right. \\
& \quad \left. + \sum_i \int_{t_0}^{t_1} L_i(X_s, Y_s^i) \circ dW_s^i + F(X_{t_1}) \right] \quad (43)
\end{aligned}$$

を最小にする X は、以下の前進後退確率微分方程式 (確率ハミルトン系) (30), (31), (32) を満たす。

定理 3 の逆も適当な条件を与えれば成り立つ。

4. 確率可積分系

4.1 「可積分」確率微分方程式

一般にストラトノビッチ型で表現された確率微分方程式

$$dY_t = \sum_{i=0}^d V_i(Y_s) \circ dW_s^i$$

に対して、滑らかな関数 f に対する伊藤の公式は

$$df(Y_t) = \sum_{i=0}^d V_i f(Y_s) \circ dW_s^i \quad (44)$$

と単純な形で表せる。(44)の右辺の V_i たちに伊藤の公式を適用すると

$$\begin{aligned} df(Y_t) &= \sum_{i=0}^d V_i f(Y_0) dW_s^i \\ &+ \sum_{i,j} \int_0^s V_j V_i f(Y_{s_1}) \circ dW_{s_1}^i dW_s^j \end{aligned} \quad (45)$$

となる。これを繰り返していくと、積分形では

$$\begin{aligned} f(Y_t) - f(Y_0) &= V_i f(Y_0) W_t^i + V_j V_i f(Y_0) \int_0^t W_s^j \circ dW_s^i + \dots \\ &+ V_{i_1} \dots V_{i_n} f(Y_0) \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} dW_{s_n}^{i_n} \circ \dots \circ dW_{s_1}^{i_1} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (46)$$

となる(確率テイラー展開)。ベクトル場 V_i たちが可換であるときには(46)は

$$f(Y_t) = \exp\left(\sum_i W_t^i V_i\right) f(Y_0) \quad (47)$$

という表現を持つ。ここで、ベクトル場 V に対する微分方程式 $\dot{Y}_t = V(Y_t)$ の解に対し

$$f(Y_V(t)) = \exp(tV) f(Y_V(0))$$

である。

4.2 「可積分」な確率ハミルトン系

H_1, \dots, H_d , を線形独立で互いにポアソン可換 ($\iff \{H_i, H_j\} = 0$ が $1 \leq i, j \leq n$ について成立) な \mathbf{R}^{2n} 上の滑らかな関数たちとし、 H_0 をそのある線形結合とする。つぎの(前進)確率微分方程式を考える。

$$dZ_t = \sum_{i=0}^d X_{H_i}(Z_t) \circ dW_t^i. \quad (48)$$

ここで $W_t^0 \equiv t$ であり、 (W^1, \dots, W^d) は d -次元のブラウン運動である。この確率微分方程式は次の意味で「求積可能」、つまり可積分である: 第4.1節での議論から、任意の滑らかな f に対して

$$\begin{aligned} f(Z_t) &= \left(\exp \sum_{i=0}^d W_t^i X_{H_i} \right) f(Z_0) \\ &= \exp W_t^n X_{H_n} \circ \dots \circ \exp t X_{H_0} f(Z_0) \end{aligned} \quad (49)$$

である。ここで H によるハミルトン系の解 z_t に対し、 $e^{tX_H} f(z_0)$ は $f(z_t)$ を現している。前節までの議論から、 e^{tX_H} は「求積可能」ということになっている。したがって理論的には(48)は(49)が「解ける」という意味で「求積可能」である。

(注意3) この可積分確率ハミルトン系が作用積分(43)の最適経路であるためには終端条件 $\{(x, p) : p = -\nabla F(x)\}$ が $\cup_c \cap_i \{z : f_i(z) = c_i\}$ の部分集合でなければならない。これはかなり強い制約となる。

(注意4) Xue-Mei Li[2] は、(48)を完全可積分確率ハミルトン系 (completely integrable stochastic Hamiltonian system) と呼び、その(確率版)平均化原理 (average principle) についての結果を得ている。筆者は2006年ごろにインド・バンガロールの統計研究所でその講演を聞いた。

4.3 結語

可積分確率ハミルトン系が実際に求積可能であるかは脇に置いておいて、何の対称性も仮定しない確率制御問題の前進後退確率微分方程式を(数値的に)解くということよりは計算コストが低くなることは間違いないであろう。そこで、工学や経済学、ファイナンスでの実際の最適化問題を考える場合、特に系の次元が非常に高い時に最適経路が可積分確率ハミルトン系になるようにモデル化を行う、ということには十分な意味があるように思う。

(注意5) 参考文献[3]および[4]ではより詳細に確率ハミルトン系の対称性を工学・数値解析等に応用した成果が報告されている。

参考文献

- [1] J. M. Bismut: *Mécanique Aléatoire*, Springer Lecture Notes in Mathematics 866 (1981)
- [2] X. M. Li: An averaging principle for a completely integrable stochastic Hamiltonian system, *Nonlinearity* Vol.21 803–822 (2008)
- [3] T. Misawa: Symplectic Integrators to Stochastic Hamiltonian Dynamical Systems Derived from Composition Methods, *Mathematical Problems in Engineering* Article ID 384937, 12 pages (2010)
- [4] S. Satoh ; K. Fujimoto: Passivity based control of stochastic port-Hamiltonian systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol. 58 , No. 5, pp.1139–1153 (2013)
- [5] 赤堀 次郎: 確率システムのハミルトン系について; システム/制御/情報, Vol. 53, No. 5, 53 巻 5 号 pp. 184–188 (2009)

著者略歴

あか ほり じ ろう
赤 堀 次 郎 (正会員)



1967年6月生。1991年3月東京大学理学部数学科卒業。1997年東京大学大学院数理科学研究科博士課程修了。1998年立命館大学工学部数理科学科専任講師。助教授、准教授を経て2008年4月より教授。確率過程論と数理ファイナンスの研究に従事。

博士(数理科学)。日本数学会、日本応用数理学会、日本金融・証券計量・工学学会などの会員。

確率リャプノフ安定論—ノイズが導く多様な安定性

西村 悠樹*

1. はじめに

理論的に構築されたシステムモデルは、多かれ少なかれ実在のシステムとは挙動が異なる。しかし、このことはシステム制御理論に奥深さと多様性とを与える一助にもなっている。モデル化誤差や測定誤差、あるいはパラメータ変動など、理想と現実のギャップを考慮することは制御設計にとって重要な課題である。

システム制御理論における理想と現実のギャップの一種に、ノイズがある。ノイズとは一般的にはシステムの挙動を妨げる余計な信号のことであり、システムの外部から意図せずに加えられる外乱のこともあるが、システムに内在することもある¹。

本稿では、多様なノイズのうちガウス型ホワイトノイズのみを扱う。これはガウス分布（正規分布）に従い全ての周波数を持つ（白色性）ような確率性信号であり、確率システム論における最も基礎的な信号である²。

常微分方程式に従うシステム（確定システム）にガウ

* 鹿児島大学学術研究院理工学域工学系

Key Words: stochastic system, Lyapunov stability

¹ノイズ（雑音, noise）という用語の正確な定義は難しい。広辞苑第7版（岩波書店）「信号の邪魔になる電氣的擾乱」、電気用語辞典（コロナ社）「情報の伝達を妨害する複雑な音響」、機械工学用語辞典（理工学社）「①一般に不規則な性質をもち、明確な振動数成分を示さない信号 ②情報内容を不鮮明にするような、好ましくないじょう乱」、Concise Oxford English Dictionary (Oxford University Press) “irregular fluctuations accompanying and tending to obscure an electrical signal or other significant phenomenon”。一部の辞書を除いては望ましくない信号であることが多いのだが、確率システム論では入力信号とみなす確率信号を全てノイズと呼称することが多く、確率信号の印加による安定化 [39,46] や確率共鳴 [27] のように役立つ信号に対しても「ノイズ」と呼称する。また、ノイズという語に確率性（試行毎に値が変わる性質）と振動性（ある閾値や確定的信号などを基準として何度も揺れ動く信号）の両方が必ず付随するかはよく分からない。

²現実的にはノイズがいつもガウス分布のように整った分布に従うとも、白色性を持つとも、もっと言えばマルコフ性を持つとも限らない。そのためガウス型ホワイトノイズは理想化されたノイズとも言えるが、この理想化により確率システム論が大きく発展した。従っ

て、語弊を承知で敢えて例えるならば、確率システム論におけるガウス型ホワイトノイズは、制御理論における線形フィードバックと同じような立ち位置にある。³常微分方程式と確率微分方程式との違いは、実は確率信号の有無ではない。例えば確率信号の一種である有色ノイズが含まれる場合、常微分方程式で表現できることは広く知られている [15]。両者の違いは、表面的には白色性信号の有無だが、より根源的には入力信号が非有界変動関数のダイナミクスに従っているかどうかである。概論的には拙著 [30,32,46] を、理論的により詳細な議論は例えば [8,24,40] を参照されたい。

ス型ホワイトノイズが与えられると、システムは確率微分方程式に従うようになる（確率システム）³。確率微分方程式は常微分方程式とは異なる枠組みで体系化されているため、その安定論も一から構築する必要がある。

実際のところ、確率システムの安定性は多様であり、確定システムの漸近安定性に対応する性質だけでも複数の定義が存在する。そのため、確率システムの安定論はその創始から半世紀以上が過ぎた現在においてもその基礎に未解決部分を残したままとなっている。

確率システム安定論の基礎は、1960年代に Khasminskii [15], Kushner [17], Kozin [19] などにより築かれ、Arnold [1], Aubin and Deprato [3], Mao [26], Levakov [21] などにより発展した。制御設計に直接関わるものとしては例えば Arnold [2], Mao [25], Florchinger [6,7], Bardi and Cesaroni [4] による成果がある。内部安定性ではなく入出力安定性に関わるもの（確率入力状態安定性やノイズ状態安定性など）としては Deng ら [5], Liu ら [23] などが代表的である。確率有限時間安定性については少々遅く Yin ら [38] 辺りから本格的な研究が始まっており、最近ではスライディングモード制御との融合が Poznyak [34] により試みられている。

筆者を含む研究グループにおける確率システム安定論への貢献としては、安定性の定義そのものに直接関わるもの [28,31,45,47], ノイズによる安定化 [10,29,33], 確率有限時間安定性 [11,41], 入出力安定性に関わるもの [13,14] などがある。

本稿では、確率システムのリャプノフ安定論におけるこれら基礎的部分の発展を追い、時に筆者らの成果を紹介しながら、確定システムにおけるリャプノフ安定論との違いを検証する。

2. 準備：記号の定義とシステムの記述

まずは本稿で用いる記号を定義する。本稿では \mathbb{R}^n を n 次元ユークリッド空間とし、特に $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ とする。また、関数 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ と $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を考え、 V と h についてのリー微分を

$$(L_h V)(x) := \frac{\partial V(x)}{\partial x} h(x) \quad (1)$$

とする。

次に、ガウス型ホワイトノイズの「素」であるウィーナー過程を簡単に紹介する。確率過程 $w: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ と時刻 $0 \leq s < \tau < t$ を考える。確率過程 w が (標準) ウィーナー過程であるとは、連続関数で初期値が $w(0) = 0$ であり、かつその増分 $w(t) - w(s)$ がガウス分布 (正規分布) に従い、さらに

$$\mathbb{E}\{w(t) - w(s)\} = 0 \quad (2)$$

$$\mathbb{E}\{(w(t) - w(s))(w(t) - w(s))^T\} = (t - s)I \quad (3)$$

$$\mathbb{E}\{(w(t) - w(\tau))(w(\tau) - w(s))^T\} = 0 \quad (4)$$

(ただし、 $\mathbb{E}\{A\}$ はある事象 A の期待値、 I は単位行列) を満たすことをいう¹。

以上の準備の下、常微分方程式から確率微分方程式を導く流れを簡潔に説明する。はじまりの確定システムを常微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{\alpha=1}^d \sigma_{\alpha}(x(t)) \dot{w}_{\alpha}(t) \quad (5)$$

とする。ここで、時間変数 $t \in [0, \infty)$ 、状態 $x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ と入力 \dot{w} の積分を $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ とし、 $f, \sigma_1, \dots, \sigma_d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は全て滑らかであるとする。また、初期時刻 $t=0$ と初期値 $x(0) = x(0) \in \mathbb{R}^n$ は与えられているとする。確定システム (5) の両辺を時間変数 t で積分した上で u を d 次元標準ウィーナー過程とすると ($u = w$)、積分方程式

$$\int_0^t dx(\tau) = \int_0^t f(x(\tau)) d\tau + \sum_{\alpha=1}^d \int_0^t \sigma_{\alpha}(x(\tau)) dw_{\alpha}(\tau) \quad (6)$$

が得られるが、この式の右辺における最後の積分は

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sigma_{\alpha}(x(\tau)) dw_{\alpha}(\tau) \\ &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \sigma_{\alpha}(x(t_{k-1})) \{w(t_k) - w(t_{k-1})\} \end{aligned} \quad (7)$$

と定義される伊藤積分である。なお、上の式では時間区間 $[0, t]$ を数列 $0 = t_0 < \dots < t_N = t$ で N 分割しており、l.i.m は平均二乗収束値を意味する。システム (6) から積分記号を省略して τ を改めて t と置いた

$$dx(t) = f(x(t))dt + \sum_{\alpha=1}^d \sigma_{\alpha}(x(t)) dw_{\alpha}(t) \quad (8)$$

を (伊藤型) 確率微分方程式という²。

本稿で中心的に扱うリャプノフ安定論では、確率微分方程式の解である状態変数 $x(t)$ の汎関数 $v(x(t)) \in \mathbb{R}$ のダイナミクスを解析する必要があるが³、これは次のように与えられる。

$$dv(x(t), t) = (\mathcal{L}v)(x(t))dt + \sum_{\alpha=1}^d (L_{\sigma_{\alpha}} v)(x(t)) dw_{\alpha}(t) \quad (9)$$

ここで、

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}v)(x) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[V(x(t+h))] - V(x(t))}{h} \\ &= (L_f v)(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d \sigma_{\alpha}^T(x) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]^T (x) \right] \sigma_{\alpha}(x) \end{aligned} \quad (10)$$

は無限小作用素と呼ばれる。右辺第二項がいわゆる伊藤 (修正) 項であり、常微分方程式の理論体系からは出てこない項である。

² 確率微分方程式を定義するためにわざわざ積分方程式を経由したのは、ウィーナー過程の導関数 \dot{w} が定義できないためである (超関数の意味では定義できるが [48]、現段階では数学的に高度な解説が必要となることと、常微分方程式との区別がつかなくなると汎関数のダイナミクス解析に混乱を来す恐れがあるため本稿では採用していない)。これはそもそもウィーナー過程が非有界変動性を持つからであり、(7) 式がリーマン・スティルチェス積分として定義できない理由でもある。伊藤積分では平均二乗収束性を用いて積分の定義不能性を回避しているが、しかしリーマン・スティルチェス積分では満たされる「リーマン和の取り方に依らず収束値が不変」という性質は回復しない。このことは、ストラトノビッチ積分 [36] やウォン・ザカイ修正項 [37] など確率解析に特有の結果を導くが、これらに基づくシステムの非一意性は既に拙著 [46] で述べられているので参照されたい。

¹ ウィーナー過程の厳密な定義は確率過程論の基礎知識を必要とするので割愛するが、必要であれば専門書 (例えば [12, 20, 40]) を参照されたい。なお、これら数学の専門書では「ブラウン運動 (Brownian motion)」と呼称されていることが多いが、一般には物理現象としてのブラウン運動を理想化したものがウィーナー過程であるため、物理学的には両者は異なる [43, 44]。本稿では読者層が多岐にわたる (と期待している) ので、無用の混乱を避けるため数学的存在である「ウィーナー過程 (Wiener process)」で呼称を統一する。

3. いろいろな確率安定性

本章では基本的な確率リャプノフ安定論を紹介し、確定システムのリャプノフ安定論との違いを検証する。

3.1 確定システムのリャプノフ安定性

まずはベースとなる確定システムにおけるリャプノフ安定論を簡単に見ていく。システム

$$\dot{x} = f(x(t)), x \in \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (12)$$

の原点 ($x=0$) が孤立平衡点であるとする、この原点の安定性は次のように定義される：

- (1) 全ての $\varepsilon > 0$ および $t > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し、 $|x(0)| < \delta$ のとき $|x(t)| < \varepsilon$ となるならば、リャプノフ安定であるという。
- (2) リャプノフ安定であり、かつ $|x(0)| < \delta$ のとき $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ となるならば、局所漸近安定であるという。
- (3) リャプノフ安定であり、かつすべての $x(0) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ となるならば、大域漸近安定であるという。

上記の安定性に対する安定定理の代表的なものは次の通りである。

【定理 1】 システム (12) の原点は、原点を含むある部分空間 $D \subset \mathbb{R}^n$ において正定プロパーな C^1 級関数 $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $(L_f V)(0) = 0$ となり、

- (1) D 上で $(L_f V)(x) \leq 0$ となるならば、リャプノフ安定である。
- (2) D 上の原点以外で $(L_f V)(x) < 0$ となるならば、局所漸近安定である。
- (3) $D = \mathbb{R}^n$ として前項までの全てが成り立つならば、大域漸近安定である。◆

以降では上記の安定定理との比較検討を進める。

3.2 確率安定性

確率システム安定論の黎明期には、確定システムのリャプノフ安定論をベースとして様々な安定性が提案された [19]。次の定義は、Khasminskii [15] による。

【定義 1】 (確率安定) 確率システム (8) の原点は、

- (1) 全ての $\varepsilon > 0$ および $t > 0$ に対して

$$\lim_{x(0) \rightarrow 0} \mathbb{P} \left[\sup_{t > 0} |x(t)| > \varepsilon \right] = 0 \quad (13)$$

となるならば、確率安定であるという。

- (2) 確率安定であり

$$\lim_{x(0) \rightarrow 0} \mathbb{P} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \right] = 1 \quad (14)$$

となるならば、局所確率漸近安定¹であるという。

- (3) 確率安定であり、かつすべての $x(0) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbb{P}[\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0] = 1$ となるならば、大域確率漸

近安定²であるという。

上記は確定システムの安定性に確率演算を加えて拡張したものである。また、以下で示すように安定性の十分条件にも相似性が認められるため、現代においても定義 1 をベースに安定性解析が行われることが多い。

【定理 2】 システム (8) の原点は、原点を含むある部分空間 $D \subset \mathbb{R}^n$ において正定プロパーな C^2 級関数 $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $(\mathcal{L}V)(0) = 0$ となり、

- (1) D 上で $(\mathcal{L}V)(x) \leq 0$ となるならば、確率安定である。
- (2) D 上の原点以外で $(\mathcal{L}V)(x) < 0$ となるならば、局所確率漸近安定である。
- (3) $D = \mathbb{R}^n$ として前項までの全てが成り立つならば、大域確率漸近安定である。◆

大域確率漸近安定性は 100% の収束性を保証するが、局所確率漸近安定性では保証されない。具体的な確率を計算したい場合 (例えば、収束する確率が 70% 以上であることを保証したい場合) には Kushner の定義 [17] が有効であり、これは Satoh [35] により活用されている³。

3.3 一様概安定性

前節で述べた安定性は、確定システムの安定性に確率演算を加えたものであるため自然な定義といえる。しかし、確定システムの安定性との繋がりを考えると「どのようなときに確定システムの安定性と確率 1 で等しくなるのか」を考えておきたい。つまり、リャプノフ安定・局所漸近安定・大域漸近安定の全ての性質において常に 100% の精度を求める場合に対応しておきたい。

そのような安定性を議論するためには、Bardi and Cesaroni [4] による概可安定性 (almost sure stabilizability) が有効である。筆者は彼らの議論を純粋な安定性解析に用いるため、対象システムから制御入力を除外したバージョンを定義した [28]。それは次の通りである。

【定義 2】 (一様概安定) 確率システム (8) の原点は、

- (1) 全ての $\varepsilon > 0$ および $t > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し、 $|x(0)| < \delta$ のとき確率 1 で $|x(t)| \leq \varepsilon$ となるならば、一様概安定であるという。
- (2) 一様概安定であり、かつ確率 1 で、 $|x(0)| < \delta$ のとき $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ となるならば、局所概漸近安定であるという。
- (3) 一様概安定であり、かつすべての $x(0) \in \mathbb{R}^n$ に対し

²文献 [15] では asymptotic stability in the large.

³確定システムにおける定理 1 には逆定理が存在し、また、ラサールの定理を使って十分条件を緩めることもできる [16]。同様に、確率システムにおける定理 2 の逆定理 [18] やラサールの定理も存在する [17]。ただし、定理 2 の逆定理では関数 $V(x)$ は C^2 級ではなく C^0 級となっている。これは定理 2 が必要十分条件ではないことを意味し、確率リャプノフ安定論の特異性を示す重要な点である。筆者らはこの点について検討しており [31]、そのキーポイントを 5. で説明する。

¹文献 [15] では asymptotic stability in probability.

て確率1で $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ となるならば、大域概漸近安定であるという。

この定義は、確定システムの安定性に「確率1」という要素を加えたものである。しかし、対象となるシステムはホワイトノイズによる拡散項を含むため、安定性の条件は確定システムのそれとは異なる。このことは次の安定定理により明らかとなる。

【定理 3】 システム (8) の原点は、原点を含むある部分空間 $D \subset \mathbb{R}^n$ において正定プロパーな C^2 級関数 $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $(\mathcal{L}V)(0) = 0$ となるとともに

$$\forall \alpha = 1, 2, \dots, d, \forall x \in D, (L_{\sigma_\alpha} V)(x) = 0 \quad (15)$$

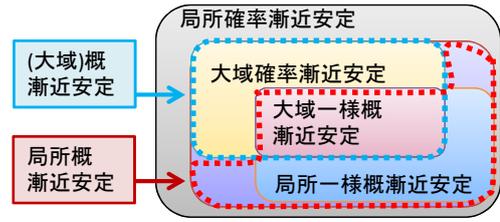
がなりたち、

- (1) D 上で $(\mathcal{L}V)(x) \leq 0$ となるならば、一様概安定である。
- (2) D 上の原点以外で $(\mathcal{L}V)(x) < 0$ となるならば、局所一様概漸近安定である。
- (3) $D = \mathbb{R}^n$ として前項までの全てが成り立つならば、大域一様概漸近安定である。◆

上記では、Bardi and Cesaroni[4]の定義と違い「一様: uniform」という語を追加している¹。実は、大域確率漸近安定性のことを概漸近安定 (almost sure asymptotic stability または同義の asymptotic stability with probability one) と表記する文献も存在するため [9, 19, 17, 22, 26], 用語の衝突を避けている。

この用語の衝突は、大域確率漸近安定性と大域一様概漸近安定性がどちらも確率1での収束性を担保することに端を発している。しかし、この二つは異なる概念であり、両者の違いは収束の仕方に現れる。システムの原点が大域確率漸近安定であるとき、その解軌道は原点に近づいたり遠ざかったり揺れ動きながら、長時間で観察すれば原点に近づいていき、やがては原点に収束する。そのとき、全状態空間 \mathbb{R}^n のいかなる真部分空間も不変集合となる必要はない (原点のみからなる部分空間を除く)。大域一様概漸近安定の場合も、その解軌道は原点に近づいたり遠ざかったり揺れ動きながら収束していくが、しかしどの時刻においてもその点を境界に含む不変集合が存在する。つまり、大域一様概漸近安定性は、確定システム (時不変システム) の大域漸近安定性と同様、入れ子構造を持った不変集合の存在を要するのである。

なお、(15) 式の条件があることから、入れ子構造を持った不変集合とは関数 $V(x)$ のサブレベル集合である。この点も、確定システムのリャプノフ関数と定理3を満たす関数 $V(x)$ との共通点である²。



第1図 確率システムにおける漸近安定性の包含関係。

3.4 局所概漸近安定性

前節から、一様概安定性は確定システムの安定性と「確率1で等しい」と言えそうである。これは重要な成果であるが、定理3の条件(15)はかなり厳しい。そこで筆者は、不変集合の入れ子構造を緩めて「ある部分空間の内部からは100%出ていかない」という局所的な漸近安定性を定義した [28]。本節ではこの性質を紹介する。

【定義 3】 (局所概漸近安定) 確率システム (8) の原点が確率安定であるとする。原点を含むある部分空間 $D \subset \mathbb{R}^n$ が存在して、全ての $x(0) \in D$ および $t > 0$ に対して、確率1で $x(t) \in D$ を保ちつつ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ となるならば、局所概漸近安定であるという。

また、これに対応する安定定理は次の通りである。

【定理 4】 システム (8) の原点は、正定プロパーな C^2 級関数 $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $(\mathcal{L}V)(0) = 0$ となり、更に

$$\forall \alpha = 1, 2, \dots, d, \forall x \in \partial D, (L_{\sigma_\alpha} V)(x) = 0 \quad (16)$$

がなりたち、かつ D 上の原点以外で $(\mathcal{L}V)(x) < 0$ となるならば、局所概漸近安定である。◆

局所概漸近安定性は、確率1での漸近安定性を保証するために大域的性質まで求める確率安定論の使いづらさを解消したいという動機から提案した。不変集合 D が一つ見つければ、その内部を初期値に持つ解が D に留まりつつ原点に確率1で収束する。定理4の条件(16)と定理3の条件(15)との違いは、前者が D 内の全ての x への条件なのに対し、後者は D の境界 ∂D 内の x のみへの条件となっている点である。

また、局所概漸近安定性では D の境界 ∂D を用いることから D は有界集合だが、 D を \mathbb{R}^n に限りなく近づけると大域確率漸近安定性と一致する。このことは、大域確率漸近安定性を概漸近安定性と呼称することとも整合性が取れている。また、 D の内部が入れ子構造を持った不変集合で隙間なく埋められるなら、局所一様概漸近安定性と一致する。このように、局所概漸近安定性は、確率漸近安定性と一様概漸近安定性の中間に位置する性質である。それらの関係を図1に示しておく。

¹Bardi and Cesaroni[4]の本文中においても uniform という語を使って説明している箇所がある。

²元の文献 [4] では、定理3とは異なり関数 $V(x)$ は上半連続となっている。これは彼らが $V(x)$ を確率偏微分方程式の粘性解として特徴付けたかったためである。一様概安定性では入れ子構造を持った不変集合を利用

して安定性を証明するため、確定システムの安定論と同様、粘性解に拡張しても安定性解析ができる。しかし、ここでは他の安定性との比較をする都合上、関数 $V(x)$ の無限小作用素が定義できない場合の安定性解析を避け、 C^2 級に留めておく。

4. 確率リャプノフ安定論の発展

確率漸近安定性は確率システム安定論で最もよく解析される安定性だが、前章で議論したような確率性そのもの以外においても、確定システムの安定性解析と異なる結果を導くことがある。

それは、原点が確率漸近安定であるにも関わらず定理 2 の条件を満たすような関数 $V(x)$ が存在しないケースである。このことは Khasminskii[15] の Remark 5.5 において既に示されているので簡潔に紹介する。

スカラシステム

$$dx(t) = ax(t)dt + cx(t)dw(t), \quad a, c \in \mathbb{R} \quad (17)$$

の原点は、 $a < c^2/2$ を満たすとき大域確率漸近安定となる。このことは解析解 $x(t) = x(0)\exp\{(a - c^2/2)t + cw(t)\}$ から直ちに証明されるが、リャプノフ指数による安定判別 [15,26] でも証明可能である。しかし、確率リャプノフ安定論で証明しようとする、定理 2 を満たす関数 $V(x)$ が $V(x) = |x|^{1-2a/c^2}$ となることから、 a と c の値によっては原点で C^2 級ではなくなってしまう。

つまり、上記の関数 $V(x)$ は原点において無限小作用素を持たないことがあるため、これまでのように無限小作用素を微分作用素のように扱うだけでは安定性解析ができない。Khasminskii[15] は、システム (8) の原点が平衡点でかつ全ての係数が大域リブシツであるとき、原点以外から始まる解が原点に有限時間では到達できない (inaccessible) ことを利用して、この特異性のある意味で無視している。しかし、それ以外の場合では安定性の証明には再検討が必要であるため、拙著 [31] ではこの点を主テーマに安定論を展開している。

このテーマは、確率安定性・モーメント安定性・概安定性の関係 [42] にも深く関与していると考えられるため、筆者にとって興味深い。今はまだ理論を詰めている段階であるため、これについてはまたの機会に詳しく説明したい。

5. おわりに

本稿は確率システムシンポジウム (SSS) 50 回記念特集号別冊の一部として執筆させて頂いたこともあり、往年の結果と筆者の成果との関わりに比重を置いた解説記事にさせて頂いた。確率システムにおけるリャプノフ安定論の不思議さと面白さをお伝えできていれば幸いです。

謝 辞

本稿を企画して頂いた立命館大学の杉本末雄先生に厚く御礼申し上げます。また、本稿で紹介させて頂いた筆者の研究成果における共著者のみなさまに深く感謝申し上げます。本研究の一部は JSPS 科研費 17H03282 の助成を受けました。

参考文献

- [1] L. Arnold, E. Oeljeklaus and E. Pardoux: Almost sure and moment stability for linear stochastic systems, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1186, pp. 129–159 (1986)
- [2] L. Arnold: Stabilization by noise revisited, *ZAMM - J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 70, pp. 235–246 (1990)
- [3] J. -P. Aubin and G. D. Prato: Stochastic Lyapunov method, *Nonlinear Diff. Eq. Appl.*, Vol. 2, No. 4, 511/525, Birkhäuser Verlag, 1995.
- [4] M. Bardi and A. Cesaroni: Almost sure stabilizability of controlled degenerate diffusions, *SIAM J. Contr. Optim.*, Vol. 44, No. 1, pp. 75–98 (2005)
- [5] H. Deng, et al: Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 46, No. 6, pp. 1237–1253 (2001)
- [6] P. Florchinger: A universal formula for the stabilization of control stochastic differential equations, *Stoch. Anal. Appl.*, Vol. 11, No. 2, pp. 155–162 (1993)
- [7] P. Florchinger: Lyapunov-like techniques for stochastic stability, *SIAM J. Contr. Optim.*, Vol. 33, No. 4, pp. 1151–1169 (1995)
- [8] P. K. Friz and M. Hairer: *A Course on Rough Paths*, Springer International Publishing, Switzerland (2014)
- [9] D. J. Higham, X. Mao and C. Yuan: Almost sure and moment exponential stability in the numerical simulation of stochastic differential equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 45, No.2, 592–609 (2007)
- [10] K. Hoshino, Y. Nishimura, Y. Yamashita and D. Tsubakino. Global asymptotic stabilization of nonlinear deterministic systems using Wiener processes, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 61, No. 8, pp. 2318–2323 (2016)
- [11] K. Hoshino, Y. Nishimura and Y. Yamashita: Convergence rates of stochastic homogeneous systems, *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 124, pp. 33–99 (2019)
- [12] N. Ikeda, S. Watanabe: *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland (1989)
- [13] H. Ito and Y. Nishimura: Stability of stochastic nonlinear systems in cascade with not necessarily unbounded decay rates, *Automatica*, Vol. 62, No. 12, pp. 51–64, 2015.
- [14] H. Ito and Y. Nishimura: An iISS framework for stochastic robustness of interconnected nonlinear systems, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 61, No. 7 pp. 1–16 (2016)
- [15] R. Z. Khasminskii: *Stochastic Stability of Differential Equations*, Second Edition, Springer (2012)
- [16] H. K. Khalil: *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 1996.
- [17] H. J. Kushner: *Stochastic Stability and Control*, Academic Press, New York, 1967.

- [18] H. J. Kushner: Converse theorems for stochastic Liapunov functions, *SIAM J. Contr.*, Vol. 5, pp. 228–233 (1967)
- [19] F. Kozin: A survey of stability of stochastic systems, *Automatica*, Vol. 5, pp. 95–112 (1969)
- [20] H. Kunita: *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*, Cambridge University Press (1990)
- [21] A. A. Levakov: Stability analysis of stochastic differential equations with the use of Lyapunov functions of constant sign, *Ordinary Differential Equations*, Vol. 47, No. 9, pp. 1271–1280 (2011)
- [22] X. Li and X. Mao: A note on almost sure asymptotic stability of neutral stochastic delay differential equations with Markovian switching, *Automatica*, Vol. 48, pp. 2329–2334 (2012)
- [23] S. -J. Liu, J. -F. Zhang and Z. -P. Jiang: A notion of stochastic input-to-state stability and its application to stability of cascaded stochastic nonlinear systems, *Acta Math. Appl. Sinica*, English Series, Vol. 24, No. 1, pp. 141–156 (2008)
- [24] T. J. Lyons, M.J. Caruana and T. Lévy: *Differential Equations Driven by Rough Paths*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2007)
- [25] X. Mao: Stochastic stabilization and destabilization, *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 23, pp. 279–290 (1994)
- [26] X. Mao: *Stochastic Differential Equations and Applications (2nd ed.)*, Cambridge: Woodhead Publishing, 2007.
- [27] M. D. McDonnell and D. Abbott: What is stochastic resonance? definitions, misconceptions, debates, and its relevance to biology, *PLoS Computational Biology*, Vol. 5, No. 5, e1000348 (2009)
- [28] Y. Nishimura: Conditions for local almost sure asymptotic stability, *Syst. Contr. Lett.* Vol. 94, pp. 19–24 (2016)
- [29] Y. Nishimura: Stabilization by artificial Wiener processes, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 61, No. 11, pp. 3574–3579 (2016)
- [30] Y. Nishimura: Stabilization by unbounded-variation noises, *Int. J. Robust Nonlin.*, Vol. 26, No. 18, pp. 4126–4147 (2016)
- [31] Y. Nishimura and H. Ito: Stochastic Lyapunov functions without differentiability at supposed equilibria, *Automatica*, Vol. 92, No. 6, pp. 188–196 (2018)
- [32] Y. Nishimura and D. Tsubakino: Local controllability of single-input nonlinear systems based on deterministic Wiener processes, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 65, No. 1, pp. 354–360 (2020)
- [33] Y. Nishimura, K. Tanaka, Y. Wakasa and Y. Yamashita: Stochastic asymptotic stabilizers for deterministic input-affine systems based on stochastic control Lyapunov functions, *Trans. Fund. Elec. Com. Com. Sci.*, Vol. E96-A, pp. 1695–1702 (2013)
- [34] A. S. Poznyak: Stochastic super-twist sliding mode controller, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 63, No. 5, pp. 1538–1544 (2018)
- [35] S. Satoh and M. Saeki: Bounded stability of nonlinear stochastic systems, *SICE J. Contr., Meas. Syst. Integr.*, Vol. 8, No. 2, pp. 181–187 (2015)
- [36] R. L. Stratonovich: A new representation of stochastic integrals, *SIAM J. Contr.*, Vol. 4, pp. 362–371 (1966)
- [37] E. Wong and M. Zakai: On the relation between ordinary and stochastic differential equations, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 3, pp. 213–229 (1965)
- [38] J. Yin, S. Khoo, Z. Man and X. Yu, Finite-time stability and instability of stochastic nonlinear systems, *Automatica*, Vol. 47, No. 12, pp. 2671–2677 (2011)
- [39] 東, 他: 「ランダムイズド制御—ランダム性を活用した新しい制御」特集号, システム/制御/情報, Vol. 60, No. 5 (2016)
- [40] 伊藤, 他: 確率論ハンドブック, 丸善出版 (2012)
- [41] 上原, 西村, 星野: 確率システムの有限時間安定性補償器, 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J100-A, No. 8, pp. 303–308 (2017)
- [42] 砂原善文: 確率システム理論, コロナ社 (1979)
- [43] 関本謙: ゆらぎのエネルギー論: 岩波書店, 2006.
- [44] 高岡浩一郎: 確率微分方程式の基礎, 応用数理, Vol. 17, No. 1, pp. 21–28 (2007)
- [45] 西村悠樹: 確率システムに対する Lyapunov 安定論, システム/制御/情報, Vol. 55, No. 12, pp. 513–518 (2011)
- [46] 西村悠樹: ノイズによる安定化—人工ウィナー過程とその効果に迫る, Vol. 61, No. 9, pp. 375–380 (2017)
- [47] 西村, 田中, 若佐: 1次元 Wiener 過程による確定アファインシステムの概漸近安定化問題, 計測自動制御学会論文集, Vol. 49, No. 4, pp. 432–439 (2013)
- [48] 飛田武幸: 確率論の基礎と発展, 共立出版 (2011)

著者略歴

にしむら ゆうき 西村 悠樹 (正会員)



2009年3月北海道大学大学院情報科学研究科博士後期課程修了。同年4月山口大学大学院理工学研究科助教。2012年4月鹿児島大学大学院理工学研究科准教授となり現在に至る。非線形制御や確率安定論を中心としたシステム制御理論および応用研究に従事。博士(情報科学)。計測自動制御学会, 日本応用数理学会, 電子情報通信学会, 日本機械学会, IEEE, SIAMなどの会員。

Kalman Filter and Nonlinear Filters for Space Navigation

Masaya MURATA*

1. Introduction

In this article, the satellite navigation using GPS that has been developed by the JAXA is briefly summarized. The GPS receiver (GPSR) is the onboard device of satellite which collects and processes the signals emitted from the GPS satellites operated by the U.S. Air Force. Based on the range information between the satellite and each GPS satellite calculated from the acquired signal, the state of the satellite such as its position and velocity is estimated realtime by the GPSR. The extended Kalman filter (EKF) is the often used navigation filter for the state estimation.

Currently, due to the high accuracy of orbit and clock information of the GPS satellites provided for users and also to the high performance computer onboard a satellite[1], the GPSR records the impressive navigation accuracy such as those less than 1m and 1mm/sec for position and velocity, respectively[2][3]. Section 2 summarizes the development history of the JAXA's GPSR.

Although the great success of the EKF for space navigation, the other nonlinear filters such as the unscented Kalman filter (UKF) and the particle filter (PF) have been actively designed in the filtering research community. Therefore, this article also explains the representative nonlinear filters and evaluates their filtering accuracy using a benchmark simulation model, aiming to provide accurate filters for the space navigation community.

2. GPS Navigation of JAXA

In 1994, the Japan's first GPS navigation test was conducted by the Orbit Reentry Experiment (OREX). However, due to the malfunction of the onboard device, the GPS navigation was not executed. The GPS signals acquired during the re-entry phase were analyzed on ground and the orbit determination for the OREX spacecraft was performed, which recorded the maximal position error of 300m.

The Japan's first GPS navigation was successfully accomplished by the Space Flyer Unit (SFU) launched in 1995; the position and velocity estimation accuracy of 100m and 10cm/sec were recorded. Then, the GPS navigation technique was also applied to the relative navigation system for the Automatic Landing Flight Experiment (ALFLEX) in 1996 and the Engineering Test Satellite (ETS)-VII launched in 1997,

respectively.

On the other hand, the world's first attempt for the GPS navigation was planned for the Landsat-4 mission launched in 1982 but its GPSR soon became disabled after the launch. Then, the Landsat-5 was launched in 1984 and the world's first GPS navigation was successfully performed onboard[4].

As for Japan, the GPSR onboard the Advanced Earth Observing Satellite-II (ADEOS-II) launched in 2002 achieved the navigation accuracy of less than 30m and 7cm/sec for position and velocity estimation, respectively. This improvement over the results for the SFU was significant and it is considered as mainly due to the cancellation of the selective availability (SA) performed by the U.S. in 2000.

The GPSR onboard the Advanced Land Observing Satellite (ALOS) could process both L1C/A and L2P/Y signals and the orbit determination on ground using these data achieved the accuracy of less than 1m. The number of signal acquisition channels for the Greenhouse gases Observing Satellite (GOSAT) launched in 2009 then became six to eight.

Further development was made for the L1C/A GPS navigation of the ALOS-2 launched in 2014. The L2P/Y signal was processed on ground as well as the ALOS for the orbit determination. The GPSR called the next generation was registered as the JAXA's standard component in 2013 and it was onboard the Advanced Satellite with New system Architecture for Observation (ASNARO) launched in 2014. The next generation GPSR was also onboard the ASTRO-H launched in 2016 and it was designed to perform the dual frequency GPS navigation using L1C/A and L2C. However, due to the insufficient number of satellites broadcasting the L2C, this navigation mode was not used for both ASNARO and ASTRO-H.

2.1 Navigation Accuracy

The L1C/A GPS navigation accuracy of the JAXA's GPSR was evaluated using the ASTRO-H flight data and the accuracy of 1.7m and 11mm/sec for position and velocity was confirmed[1]. This navigation accuracy was almost comparable to that for the GPSR developed by foreign space agencies, however,[2] and[3] reported the accuracy of less than 1m and 1mm/sec for position and velocity, respectively. As mentioned, the accuracy of L1C/A and L2C dual frequency navigation was not evaluated in orbit yet due to the insufficient number of satellites providing the L2C signal. The full operational capability (FOC) will be

* Japan Aerospace Exploration Agency

Key Words: State Estimation, Filtering, Space Navigation.

Table 1 Filter List

Extended Kalman filter (EKF)
Unscented Kalman filter (UKF)[6]
Ensemble Kalman filter (EnKF)[7]
Monte Carlo filter (MCF)[8] (equivalent to Bootstrap filter[9])
Extended Kalman particle filter (EKPF)[10]
Unscented Kalman particle filter (UKPF)[10]
Extended Kalman multiple distribution estimation filter (EKMDEF)[11][12]
Unscented Kalman multiple distribution estimation filter (UKMDEF)[11][12]

expected in 2023[5].

3. EKF and Nonlinear Filters: Simulation Comparison

The filter is an sequential estimation algorithm of posterior state estimates given observations. Although many filtering algorithms have been proposed until now, the EKF which roughly appeared in 1960s is still the most often used filter for the space navigation. This section describes the other nonlinear filters that have been developed in the filtering research community. Their numerical evaluation using a benchmark problem is provided, aiming to provide alternate accurate filters for the space navigation community.

3.1 Nonlinear Growth Model (NGM)

The NGM is the scalar benchmark filtering problem whose state-space model is expressed as follows:

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_k, w_k \sim N(0, q), \quad (1a)$$

$$\text{where } f(x_{k-1}) = 0.5x_{k-1} + \frac{25x_{k-1}}{1 + (x_{k-1})^2} + 8\cos(1.2(k-1))$$

$$y_k = h(x_k) + v_k, v_k \sim N(0, r), \text{ where } h(x_k) = \frac{x_k^2}{20} \quad (1b)$$

Here, $x_0 = 0$, $q = 1$, $r = 1$, and $\{(x_1, y_1), \dots, (x_{100}, y_{100})\}$ was generated for the simulation. The filtering accuracy was evaluated by the average of $E[|x_k - \hat{x}_k|]$ over $k = 1, 2, \dots, 100$, where, each expected absolute estimation error is estimated by the 100 Monte Carlo runs, and \hat{x}_k is the filtered state estimate at k .

Filters evaluated for this model are summarized in Table1. They are the representative nonlinear filters including the latest algorithm[11][12]. The initial condition for these filters was $\hat{x}_0 = 0$ and $\hat{p}_0 = 2$, where, \hat{p}_k denote the estimation error variance of \hat{x}_k . \bar{x}_k and \bar{p}_k are predicted state estimate and the estimation error variance at k , respectively. The system and observation noises for these filters were set as the same as those for the NGM.

3.2 Theoretical Implication

3.2.1 Linearization-Based Filters

The EKF and the UKF are both special cases of the Gaussian filter[13] as explained in the book[14]

and they are based on the linearization of nonlinear functions of states. The filtering accuracy of the UKF is generally superior over that for the EKF. The EnKF is the approximation algorithm of the linear optimal filter[15] for which the nonlinear functions are also linearized. In[15], it is shown that the Gaussian filter and the linear optimal filter are based on the moment-matched linearization (MML) for a nonlinear model for which the Gaussian filter and the linear optimal filter calculate the expectations using the Gaussian-assumed predicted state probability density function (PDF) and the non-Gaussian PDF, respectively. Therefore, for a general nonlinear state-space model, the filtering accuracy of the EnKF is better than those for the EKF and UKF since its linearization is more accurate and no Gaussian assumptions for the state PDF are imposed. The EnKF is the fastest non-Gaussian filter, while the fastest nonlinear filter is the EKF. The cubature Kalman filter and the other example filters for the Gaussian filter are also categorized in this linearization-based filter.

3.2.2 Multiple Distribution Estimation Filters

Unlike the linearization-based filters, the MCF, EKPF/UKPF, and EKMDEF/UKMDEF are all within a family of the multiple distribution estimation filters[11] for which no linearization is performed for nonlinear models. These filters differ from the choice of the importance distributions and the expression for each conditional state PDF. The Gaussian-sum filter and its variant algorithms can be also regarded as a special case of the multiple distribution estimation filter, although they are not discussed in this paper. The MCF is the second-fastest non-Gaussian filter but when the number of particles used is small, it sometimes suffers from the particle degeneracy such that the weights for particles are severely imbalanced. When the degeneracy occurs, the filtering accuracy becomes deteriorated. The EKPF/UKPF is expected to experience a smaller particle degeneracy than that for the MCF[16]. The EKMDEF/UKMDEF[11] retains the same superior property as the EKPF/UKPF against the particle degeneracy and is also designed to become robust against the particle impoverishment[16]: the particles of EKPF/UKPF are not generally duplicated during the filter execution.

To summarize, the EKMDEF/UKMDEF is the

best nonlinear filter in terms of the filtering accuracy among the comparison algorithms, although they are computationally heaviest. Then, the EKPF/UKPF and the MCF follow. The EKF is the worst filter in terms of the filtering accuracy, although its filtering speed is the fastest. Then, the UKF and the EnKF follow. This proposition is numerically confirmed by the filtering simulation for the NGM.

3.3 Filter Algorithms for NGM

3.3.1 Linearization-Based Filters

(1) EKF

The EKF linearizes nonlinear functions in Eqs. (1a) and (1b) around the current best estimates of states (\hat{x}_{k-1} and \bar{x}_k) and then, the Kalman filter is applied to the linearized models as follows:

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= f(\hat{x}_{k-1}) \\ \bar{p}_k &= \hat{f}_{k-1}^2 \hat{p}_{k-1} + q, \text{ where } \hat{f}_{k-1} = \left. \frac{\partial f(x_{k-1})}{\partial x_{k-1}} \right|_{x_{k-1}=\hat{x}_{k-1}} \\ \hat{x}_k &= \bar{x}_k + k_k(y_k - h(\bar{x}_k)), \\ \hat{p}_k &= \bar{p}_k - k_k \bar{h}_k \bar{p}_k, \text{ where } \bar{h}_k = \left. \frac{\partial h(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k=\bar{x}_k}, \\ & k_k = \bar{p}_k \bar{h}_k (\bar{h}_k^2 \bar{p}_k + r)^{-1}\end{aligned}$$

(2) UKF

The UKF uses sigma points ($\sigma_{k-1}^{(1)}$, $\sigma_{k-1}^{(2)}$, and $\sigma_{k-1}^{(3)}$) that represent the state PDFs to estimate the first two moments of nonlinearly transformed state estimates.

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= F_{k-1}W, \\ \bar{p}_k &= F_{k-1}SF_{k-1}^T + q, \\ \hat{x}_k &= \bar{x}_k + k_k(y_k - H_k W), \\ \hat{p}_k &= \bar{p}_k - k_k^2(H_k S H_k^T + r), \text{ where} \\ F_{k-1} &= (f(\sigma_{k-1}^{(1)}) f(\sigma_{k-1}^{(2)}) f(\sigma_{k-1}^{(3)})), \\ \sigma_{k-1}^{(1)} &= \hat{x}_{k-1}, \sigma_{k-1}^{(2)} = \hat{x}_{k-1} + \sqrt{3\hat{p}_{k-1}}, \\ \sigma_{k-1}^{(3)} &= \hat{x}_{k-1} - \sqrt{3\hat{p}_{k-1}}, \\ W &= (w^{(1)} w^{(2)} w^{(3)})^T, w^{(1)} = \frac{2}{3}, w^{(2)} = \frac{1}{6}, \\ & w^{(3)} = \frac{1}{6}, \\ S &= (I - [W W W])\text{diag}(w^{(1)} w^{(2)} w^{(3)}) \times \\ & (I - [W W W])^T, \\ k_k &= X_k S H_k^T (H_k S H_k^T + r)^{-1}, \\ X_k &= (\sigma_k^{(1)} \sigma_k^{(2)} \sigma_k^{(3)}), \\ H_k &= (h(\sigma_k^{(1)}) h(\sigma_k^{(2)}) h(\sigma_k^{(3)})), \\ \sigma_k^{(1)} &= \bar{x}_k, \sigma_k^{(2)} = \bar{x}_k + \sqrt{3\bar{p}_k}, \sigma_k^{(3)} = \bar{x}_k - \sqrt{3\bar{p}_k},\end{aligned}$$

(3) EnKF

The EnKF uses m particles (realizations of filtered state estimate at $k-1$ denoted as $\{\hat{x}_{k-1}^{(i)}, i=1,2,\dots,m\}$ and those of predicted state estimate at k denoted as $\{\bar{x}_k^{(i)}, i=1,2,\dots,m\}$) and updates them to approximate the first two moments of the predicted and filtered states.

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= F_{k-1}W, \\ \bar{p}_k &= F_{k-1}SF_{k-1}^T, \\ \hat{x}_k &= Z_k W, \\ \hat{p}_k &= Z_k S Z_k^T, \text{ where} \\ F_{k-1} &= (f(\hat{x}_{k-1}^{(1)}) + w_k^{(1)} f(\hat{x}_{k-1}^{(2)}) + w_k^{(2)} \dots \\ & f(\hat{x}_{k-1}^{(m)}) + w_k^{(m)}), \\ w_k^{(i)} &\sim N(0, q), W = (1/m \dots 1/m)^T, \\ S &= (I - [W \dots W])\text{diag}(1/(m-1) \dots 1/(m-1)) \\ & \times (I - [W \dots W])^T, \\ X_k &= (\bar{x}_k^{(1)} \bar{x}_k^{(2)} \dots \bar{x}_k^{(m)}), \bar{x}_k^{(i)} = f(\hat{x}_{k-1}^{(i)}) + w_k^{(i)}, \\ H_k &= (h(\bar{x}_k^{(1)}) + v_k^{(1)} h(\bar{x}_k^{(2)}) + v_k^{(2)} \dots h(\bar{x}_k^{(m)}) + v_k^{(m)}), \\ Z_k &= (\bar{x}_k^{(1)} + k_k(y_k - h(\bar{x}_k^{(1)}) - v_k^{(1)}) \\ & \bar{x}_k^{(2)} + k_k(y_k - h(\bar{x}_k^{(2)}) - v_k^{(2)}) \\ & \dots \bar{x}_k^{(m)} + k_k(y_k - h(\bar{x}_k^{(m)}) - v_k^{(m)})), \\ k_k &= X_k S H_k^T (H_k S H_k^T + r)^{-1}, v_k^{(i)} \sim N(0, r)\end{aligned}$$

Here, $w_k^{(i)} \sim N(0, q)$ and $v_k^{(i)} \sim N(0, r)$, that is, $w_k^{(i)}$ and $v_k^{(i)}$ are the i th samples are drawn from $N(0, q)$ and $N(0, r)$, respectively.

3.3.2 Multiple Distribution Estimation Filters

(1) MCF

The MCF also uses m particles and updates them for approximating the predicted state PDF. Then, their weight vector is updated from W to W'_k for approximating the filtered state PDF.

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= F_{k-1}W, \\ \bar{p}_k &= F_{k-1}SF_{k-1}^T, \\ \hat{x}_k &= F_{k-1}W'_k, \\ \hat{p}_k &= F_{k-1}S'_k F_{k-1}^T, \text{ where} \\ F_{k-1} &= (f(\hat{x}_{k-1}^{(1)}) + w_k^{(1)} f(\hat{x}_{k-1}^{(2)}) + w_k^{(2)} \\ & \dots f(\hat{x}_{k-1}^{(m)}) + w_k^{(m)}), \\ w_k^{(i)} &\sim N(0, q), W = (1/m \dots 1/m)^T, \\ S &= (I - [W \dots W])\text{diag}(1/(m-1) \dots 1/(m-1)) \\ & \times (I - [W \dots W])^T, \\ W'_k &= (N(y_k; h(\bar{x}_k^{(1)}), r)/C_k N(y_k; h(\bar{x}_k^{(2)}), r)/C_k \\ & \dots N(y_k; h(\bar{x}_k^{(M)}), r)/C_k)^T, \\ \bar{x}_k^{(i)} &= f(\hat{x}_{k-1}^{(i)}) + w_k^{(i)}, C_k = \sum_{i=1}^m N(y_k; h(\bar{x}_k^{(i)}), r), \\ S'_k &= (I - [W'_k \dots W'_k])\text{diag}((W'_k)_1 \dots (W'_k)_m) \\ & \times (I - [W'_k \dots W'_k])^T\end{aligned}$$

Here, $N(y_k; h(\bar{x}_k^{(i)}), r)$ denotes the value of $N(h(\bar{x}_k^{(i)}), r)$ evaluated at y_k . $(W'_k)_i$ is the i th element of W'_k . After calculating \hat{x}_k and \hat{p}_k , particles (elements of F_{k-1}) are resampled according to the following stratified resampling. Set $j=1$ and repeat the following procedure until $j=m$.

- (1) Sample $u^{(j)}$ from a uniform distribution denoted as $U[(j-1)/m, j/m]$, or calculate $u^{(j)} = (j-\alpha)/m$,

where $\alpha \in [0,1)$ is a fixed parameter (e.g., $\alpha = 0.5$).

- (2) Find l such that $\sum_{i=1}^{l-1} (W'_k)_i < u^{(j)} \leq \sum_{i=1}^l (W'_k)_i$.
- (3) Set $(F_k)_j := (F_{k-1})_l$.

Here, $a := b$ means replacing a with b . Note that after the resampling, \hat{x}_k and \hat{p}_k are expressed as

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= F_k W \\ \hat{p}_k &= F_k S F_k^T\end{aligned}$$

(2) EKPF/UKPF

The predicted state PDF is approximated as m Gaussian-sum for which the first two moments for the i th Gaussian component are $\bar{x}_k^{(i)}$ and $\bar{p}_k^{(i)}$.

The filtered state PDF is approximated as particle-sum, where the i th particle is sampled from the proposal distribution $N(x_k | \hat{x}_{k-1}^{(i)}, y_k)$ estimated by the observation update of the EKF/UKF.

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= F_{k-1} W, \\ \bar{p}_k &= F_{k-1} S F_{k-1}^T + F'_{k-1} W, \\ \hat{x}_k &= H_k W'_k, \\ \hat{p}_k &= H_k S'_k H_k^T, \text{ where} \\ F_{k-1} &= (\bar{x}_k^{(1)} \ \bar{x}_k^{(2)} \ \dots \ \bar{x}_k^{(m)}), \\ \bar{x}_k^{(i)} &= \int x_k N(x_k; f(\hat{x}_{k-1}^{(i)}), q) dx_k, \\ W &= (1/m \ \dots \ 1/m)^T, \\ S &= (I - [W \ \dots \ W]) \text{diag}(1/(m-1) \ \dots \ 1/(m-1)) \\ &\quad \times (I - [W \ \dots \ W])^T, \\ F'_{k-1} &= (\bar{p}_k^{(1)} \ \bar{p}_k^{(2)} \ \dots \ \bar{p}_k^{(m)}), \\ \bar{p}_k^{(i)} &= \int (x_k - \bar{x}_k)^2 N(x_k; f(\hat{x}_{k-1}^{(i)}), q) dx_k, \\ W'_k &= ((W'_k)_1 \ (W'_k)_2 \ \dots \ (W'_k)_m), \\ (W'_k)_i &= \frac{w_k^{(i)}}{C_k}, \\ w_k^{(i)} &= \frac{N(y_k; h(\hat{x}_k^{(i)}), r) N(\hat{x}_k^{(i)}; f(\hat{x}_{k-1}^{(i)}), q)}{N(\hat{x}_k^{(i)} | \hat{x}_{k-1}^{(i)}, y_k)}, \\ C_k &= \sum_{i=1}^m w_k^{(i)}, \\ H_k &= (\hat{x}_k^{(1)} \ \hat{x}_k^{(2)} \ \dots \ \hat{x}_k^{(m)}), \hat{x}_k^{(i)} \sim N(x_k | \hat{x}_{k-1}^{(i)}, y_k), \\ S'_k &= (I - [W'_k \ \dots \ W'_k]) \text{diag}((W'_k)_1 \ \dots \ (W'_k)_m) \\ &\quad \times (I - [W'_k \ \dots \ W'_k])^T\end{aligned}$$

Here, $N(x_k | \hat{x}_{k-1}^{(i)}, y_k)$ is the Gaussian-assumed distribution specified by Eqs. (1a) and (1b) given $\hat{x}_{k-1}^{(i)}$ and y_k . When it is estimated by the EKF/UKF, the algorithm becomes the EKPF/UKPF. After calculating \hat{x}_k and \hat{p}_k , the stratified resampling shown in Section 3.3.4 is performed for the particles (elements of H_k) according to the elements of W'_k .

(3) EKMDEF/UKMDEF

Given m particles, the predicted and filtered state PDFs are approximated as Gaussian-sum using m EKFs/UKFs. Then, the distribution selection is performed to draw particles preferentially from highly

weighted Gaussian components.

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= F_{k-1} W, \\ \bar{p}_k &= F_{k-1} S F_{k-1}^T + F'_{k-1} W, \\ \hat{x}_k &= H_k W'_k, \\ \hat{p}_k &= H_k S'_k H_k^T + H'_k W'_k, \text{ where} \\ F_{k-1} &= (\bar{x}_k^{(1)} \ \bar{x}_k^{(2)} \ \dots \ \bar{x}_k^{(m)}), \\ \bar{x}_k^{(i)} &= \int x_k N(x_k; f(\hat{x}_{k-1}^{(i)}), q) dx_k, \\ W &= (1/m \ \dots \ 1/m)^T, \\ S &= (I - [W \ \dots \ W]) \text{diag}(1/(m-1) \ \dots \ 1/(m-1)) \\ &\quad \times (I - [W \ \dots \ W])^T, \\ F'_{k-1} &= (\bar{p}_k^{(1)} \ \bar{p}_k^{(2)} \ \dots \ \bar{p}_k^{(m)}), \\ \bar{p}_k^{(i)} &= \int (x_k - \bar{x}_k)^2 N(x_k; f(\hat{x}_{k-1}^{(i)}), q) dx_k, \\ W'_k &= ((W'_k)_1 \ (W'_k)_2 \ \dots \ (W'_k)_m), \\ (W'_k)_i &= \frac{w_k^{(i)}}{C_k}, w_k^{(i)} = N(y_k | \hat{x}_{k-1}^{(i)}), C_k = \sum_{i=1}^m w_k^{(i)}, \\ H_k &= (\hat{x}_k^{(1)} \ \hat{x}_k^{(2)} \ \dots \ \hat{x}_k^{(m)}), \\ \hat{x}_k^{(i)} &= \int x_k N(x_k | \hat{x}_{k-1}^{(i)}, y_k) dx_k, \\ S'_k &= (I - [W'_k \ \dots \ W'_k]) \text{diag}((W'_k)_1 \ \dots \ (W'_k)_m) \\ &\quad \times (I - [W'_k \ \dots \ W'_k])^T, \\ H'_k &= (\hat{p}_k^{(1)} \ \hat{p}_k^{(2)} \ \dots \ \hat{p}_k^{(m)}), \\ \hat{p}_k^{(i)} &= \int (x_k - \hat{x}_k)^2 N(x_k | \hat{x}_{k-1}^{(i)}, y_k) dx_k\end{aligned}$$

Here, $N(y_k | \hat{x}_{k-1}^{(i)})$ is the Gaussian-assumed distribution specified by Eqs. (1a) and (1b) given $\hat{x}_{k-1}^{(i)}$. As well as the EKPF/UKPF, when it is estimated by the EKF/UKF, the algorithm becomes the EKMDEF/UKMDEF. After calculating \hat{x}_k and \hat{p}_k , the following distribution selection is performed. Set $j = 1$ and repeat the following procedure until $j = m$.

- (1) Calculate $u^{(j)} = (j - \alpha)/m$, where $\alpha \in [0,1)$ is a fixed parameter (e.g., $\alpha = 0.5$).
- (2) Find l such that $\sum_{i=1}^{l-1} (W'_k)_i < u^{(j)} \leq \sum_{i=1}^l (W'_k)_i$.
- (3) Then, $\hat{x}_k^{(l)} \sim N(x_k | \hat{x}_{k-1}^{(l)}, y_k)$ and $\hat{x}_k^{(j)} := \hat{x}_k^{(l)}$.

This distribution selection was introduced to make the filter robust against the particle impoverishment since samples drawn from the same Gaussian component are not usually duplicated. Coincidentally, this filtering algorithm is equivalent to the algorithm recently proposed in [12].

3.4 Simulation Results

This section shows the simulation results of the filters in Table 1 for the NGM. The filtering accuracy for the EKF and the UKF were 7.65 and 4.24, respectively, and those for the other filters were summarized in Table 2. α in the stratified resampling was set to 0.5 for the MCF and the EKPF/UKPF. From Table 2, it was confirmed that the filtering accuracy of the particle filters was much better than those for the EKF, UKF, and EnKF. Among the particle filters,

Table 2 Filtering accuracy for EnKF and particle filters. The first row denotes particle numbers.

	50	100	200	300
EnKF	2.58	2.59	2.57	2.58
MCF	1.81	1.75	1.67	1.66
EKPF	1.75	1.69	1.67	1.66
UKPF	1.75	1.69	1.68	1.66
EKMDEF	1.70	1.65	1.65	1.65
UKMDEF	1.69	1.65	1.65	1.65

the EKMDEF/UKMDEF showed the best accuracy and its superiority became much clearer for cases of using small particle numbers such as 50 and 100. On the other hand, the accuracy difference between the particle filters became almost zero for cases of using large particle numbers. This is because that approximation accuracy for the predicted state PDF estimated by the MCF dramatically improves as the particle number increases. From these results, when only small numbers of particles are allowed due to some constraints, the choice of the EKMDEF/UKMDEF is recommended. On the other hand, when the use of large particle numbers is permissible, the MCF may be preferred since the algorithm is much faster than the other particle filters. The choice of the EKF or the UKF for particle filters seems not to contribute to significant differences in the accuracy. Therefore, using the EKF suffices and it also makes the filtering algorithm faster.

4. Conclusions

The filtering accuracy of the representative nonlinear filters was investigated using a benchmark filtering problem of the NGM. The effectiveness of the EKMDEF/UKMDEF was confirmed by the simulation results, which well accords with the theoretical implication provided in Section 3.2.

Besides the filtering accuracy, the calculation cost is also an important aspect, especially for the space navigation due to the limited performance of the on-board computer. In general, when a new methodology for accuracy improvement is introduced to a filtering algorithm, the calculation cost becomes larger. Indeed, the EKMHPF/UKMHPF is the heaviest filters among the algorithms compared. To address this issue, the parallel implementation of particle filters becomes an essential research topic and its research has been already initiated in the filtering community.

Once the effective parallel particle filter algorithm is accomplished, it is of great interest to evaluate its performance for the space navigation. The author expects that the significant improvement will be observed especially for the moon navigation due to much noisier GPS measurements than those obtainable in the low earth orbits.

References

- [1] Y. Nakajima, T. Yamamoto, Y. Kondoh, K. Yamanaka, K. Akiyama, M. Ogawa, S. Kumagai, S. Kawakami and M. Kasahara: Precision Navigation Achieved by ASTRO-H Space-borne GPS Receiver, Transactions of The Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan, Vol. 16, No. 5, pp. 454-463, 2018.
- [2] O. Montenbruck and P. Ramos-Bosch: Precision Real-Time Navigation of LEO Satellites using Global Positioning System Measurements, GPS Solutions, Vol. 12, Issue 3, pp. 187-198, 2008.
- [3] F. Wang, X. Gong, J. Sang and X. Zhang: A Novel Method for Precise Onboard Real-Time Orbit Determination with a Standalone GPS Receiver, Sensors, Vol. 15, No. 12, pp. 30403-30418, 2015.
- [4] H. Heuberger: Performance of the GPS Package on Landsat-5, Proc. of PLANS'84 - Position Location and Navigation Symposium, 1984.
- [5] <https://www.gps.gov/>
- [6] S. J. Julier, J. K. Uhlmann and H. F. Durrant-Whyte: A New Approach for Filtering Nonlinear Systems, Proc. of the 1995 American Control Conference, pp. 1628-1632, 1995.
- [7] G. Evensen: Sequential Data Assimilation with a Nonlinear Quasi-geostrophic Model using Monte Carlo Methods to Forecast Error Statistics, Journal of Geophysical Research: Oceans, Vol. 99, Issue C5, 1994.
- [8] G. Kitagawa: Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Nonlinear State Space Models, Journal of Computational and Graphical Statistics, Vol. 5, Issue 1, 1996.
- [9] N. J. Gordon, D.J. Salmond and A. F. M. Smith: Novel Approach to Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian State Estimation, IEE Proceedings-F, Vol. 140, No. 2, 1993.
- [10] R. V. D. Merwe, A. Doucet, N. D. Freitas and E. Wan: The Unscented Particle Filter, Proc. of the 13th International Conference on Neural Information Processing Systems, pp. 563-569, 2000.
- [11] M. Murata and K. Hiramatsu: Non-Gaussian Filter for Continuous-Discrete Models, To appear in IEEE Transactions on Automatic Control, doi:10.1109/TAC.2019.2914953, May 2019.
- [12] S. Yun and R. Zanetti: Sequential Monte Carlo Filtering with Gaussian Mixture Sampling, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, doi:10.2514/1.G004403, May 2019.
- [13] K. Ito and K. Xiong: Gaussian Filters for Nonlinear Filtering Problems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, No. 5, pp. 910-927, 2000.
- [14] S. Särkkä: *Bayesian Filtering and Smoothing*, Cambridge CB2 8BS, UK: Cambridge Univ. Press, 2013.
- [15] M. Murata: On Ensemble Kalman Filter and Smoother, Proc. of the 49th ISCIE Stochastic Systems Symposium, pp. 15-20, 2017.
- [16] M. Murata: On Particle Degeneracy for Particle Filters, To appear in Proc. of the 51st ISCIE Stochastic Systems Symposium, 2019.

Authors

Masaya Murata (Member)



Masaya Murata received his M.S. in physics and Ph.D. in information science and engineering from Waseda University and The University of Tokyo in 2007 and 2017, respectively. He was a researcher at the NTT Laboratories from

2007 to 2017. In 2017, he joined the Japan Aerospace Exploration Agency (JAXA) and is currently working on nonlinear filters and their application to the space navigation. He is members of ISCIE, SICE, IFAC, and IEEE CSS.

実問題への適用に向けたロバストフィルタ

石原 新士*

1. はじめに

状態推定手法の 1 つである Kalman Filter(KF) は、確率雑音を受ける線形システムにおける最適状態推定器として知られている。また、推定対象が非線形システムの場合は、非線形システムを Taylor 展開によって線形システムに近似して KF を適用する、拡張カルマンフィルタ(EKF) が広く知られている [1,2]。非線形性が強いシステムでも高い推定精度を期待できる Unscented Kalman Filter(UKF)[3] も注目されている。

上記の線形/非線形 KF は対象システムのダイナミクス(モデル)を利用したモデルベース状態手法である。よって、モデルが正確でない場合には十分な推定精度を保証することは困難である。モデルの不確かさとしては、確率雑音の確率分布モデルの違いや、パラメータの誤差などを挙げることができる。例えば、粘性摩擦などの物理パラメータは直接測定することが困難であるため、何らかの不確かさを含むことになる。このような課題は産業分野で状態推定手法を利用しようとした際に頻繁に直面する。そこで、本解説では、モデルの物理パラメータが不確かさを有するシステムを対象として、著者が検討を行っている非線形ロバスト KF である、近似最小分散不偏フィルタ [5,6] の紹介を行う。

なお、実問題においては、不確かさを有するパラメータを持つシステムにおける状態推定のみでなく、不確かさを有するパラメータ(未知パラメータ)の推定も重要な課題になり得る。例えば、故障時に変化するパラメータを逐次推定することで、システムの故障の有無を判断する手法が利用される [7]。

状態量と未知パラメータを推定する手法として、Joint 推定や Dual 推定が知られている [8]。しかし、対象が非線形システムの場合、近似線形システムを演算する時にもパラメータ推定値を利用するため、パラメータ推定結果が状態推定結果に大きな影響を与え得る。さらに、パラメータ推定値がパラメータ真値から大きく離れてしまった場合、それに応じて近似線形システムの誤差も拡大する。このような状況では、状態量に関するフィルタ

の安定性が失われる恐れもある [9]。著者が提案した近似最小分散不偏フィルタは、パラメータ不確かさが状態量の推定結果に与える影響を分離するように拘束条件付きの最適化問題を解くことで近似的に最小分散不偏推定を実現する手法である。このため、Joint 推定や Dual 推定で問題になりえるパラメータ推定過渡期の状態推定精度劣化の抑制が期待できる。なお、上記の拘束条件付きの最適化問題は解析解を求めることができるため、KF と比べても計算時間の増加が少ないため、実機への適用へのハードルは低いと考える。

また、本解説では、近似最小分散不偏フィルタを実機適用するにあたってのいくつかの工夫を紹介する。まず、近似最小分散不偏フィルタは線形観測システムを前提としているが、これを非線形観測システムに適用する方法を簡単に紹介する。その後、近似最小分散不偏フィルタにおける線形化誤差を考慮したロバスト近似最小分散不偏フィルタを紹介する。さらに、ロバスト近似最小分散不偏フィルタの設計パラメータを自動調整する方法も紹介する。

本解説の最後に、近似最小分散不偏フィルタの有効性を確認するため、誘導モータモデルを利用した数値シミュレーションを行った結果を示す。

2. 準備

2.1 問題設定

未知パラメータ $p_k \in \mathbb{R}^l$ を含む、次の離散時間非線形システムを考える。

$$x_k = f(x_{k-1}, p_{k-1}) + g(x_{k-1})u_{k-1} + w_{k-1} \quad (1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (2)$$

なお、 $x_k \in \mathbb{R}^n$ は状態量、 $y_k \in \mathbb{R}^m$ は観測量であり、 w_k, v_k はそれぞれ、 $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k), v_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ に従う正規白色性のプロセス雑音、観測雑音である。 u_k は制御入力であり、 u_k の次元は非線形関数 $g(x_k)$ の次元に対応する。

本解説では、状態推定値の初期値を \hat{x}_0 、共分散行列を P_0^{xx} 、未知パラメータの推定値の初期値を \hat{p}_0 、共分散行列 P_0^{pp} として、時刻 k の観測値 y_k から状態推定値 \hat{x}_k とパラメータ推定値 \hat{p}_{k-1} をそれぞれ算出する最適フィルタの紹介を行う。

* 株式会社 日立製作所 研究開発グループ

制御イノベーションセンタ

Key Words: State estimation, Nonlinear filtering, Robust filtering

2.2 近似線形システムの導出

まず (1) 式について、時刻 $k-1$ の推定値 $(\hat{x}_{k-1}, \hat{p}_{k-1})$ の周りで線形化を行うと次式を得る。

$$x_k \approx F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + d_k + w_{k-1} \quad (3)$$

なお、 \tilde{x}_{k-1} は状態推定誤差、 \tilde{p}_{k-1} はパラメータ推定誤差であり、それぞれ $\tilde{x}_{k-1} = x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}$ 、 $\tilde{p}_{k-1} = p_{k-1} - \hat{p}_{k-1}$ で定義される。

線形化に USL[10] を利用した場合、各係数行列 F_k, G_k, d_k は次式で近似的に計算できる。

$$F_k \approx \left[\sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_{x,i} \{f(\mathcal{X}_i, \hat{p}_{k-1}) + g(\mathcal{X}_i) u_{k-1}\} (\mathcal{X}_i - \hat{x}_{k-1})^T \right] \times \{P_{k-1}^{xx}\}^{-1} \quad (4)$$

$$G_k \approx \left[\sum_{j=0}^{2l} \mathcal{W}_{p,j} \{f(\hat{x}_{k-1}, \mathcal{P}_j) + g(\hat{x}_{k-1}) u_{k-1}\} \times (\mathcal{P}_j - \hat{p}_{k-1})^T \right] \{P_{k-1}^{pp}\}^{-1} \quad (5)$$

$$d_k \approx \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_{x,i} \{f(\mathcal{X}_i, \hat{p}_{k-1}) + g(\mathcal{X}_i) u_{k-1}\} \quad (6)$$

ここで、 \mathcal{X}_i は状態ベクトル x_k についてのシグマ点列であり、 $\mathcal{W}_{x,i}$ はこれに対応するシグマ点列の重み列である。同様に、 \mathcal{P}_j は未知パラメータベクトル p_k についてのシグマ点列、 $\mathcal{W}_{p,j}$ はこれに対応するシグマ点列の重み列である。

3. 近似最小分散不偏フィルタ

本節にて、近似最小分散不偏フィルタの導出方法を簡単に紹介する。

3.1 近似最小分散不偏フィルタの構成

近似最小分散不偏フィルタの導出に先立ち、フィルタの構成を紹介する。近似最小分散不偏フィルタは次の 4 ステップを再帰的に計算することでパラメータと状態量を推定する。

Step1：状態予測ステップ (1)

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_{x,i} \{f(\mathcal{X}_i, \hat{p}_{k-1}) + g(\mathcal{X}_i) u_{k-1}\} \quad (7)$$

Step2：パラメータ推定ステップ

$$\hat{p}_{k-1}^* = \hat{p}_{k-1} + M_k (y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \quad (8)$$

Step3：状態予測ステップ (2)

$$\hat{x}_{k|k-1}^* = \hat{x}_{k|k-1} + G_k (\hat{p}_{k-1}^* - \hat{p}_{k-1}) \quad (9)$$

Step4：状態推定ステップ

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1}^* + N_k (y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}^*) \quad (10)$$

行列 $M_k \in \mathbb{R}^{l \times m}$ と $N_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$ は、それぞれ 3.3, 3.5 節で紹介する更新ゲインである。

各ステップの導出を以下の節で簡単に紹介する。

3.2 状態予測ステップ (1)

近似最小分散不偏フィルタにおける予測ステップでは、未知パラメータ p_{k-1} の推定値 \hat{p}_{k-1} で表現される非線形システムを使った一段先予測を行う。つまり、予測平均、予測誤差共分散行列をそれぞれ次式で与える。

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_{x,i} \{f(\mathcal{X}_i, \hat{p}_{k-1}) + g(\mathcal{X}_i) u_{k-1}\} \quad (11)$$

$$P_{k|k-1}^{xx} = F_k P_{k-1}^{xx} F_k^T + Q_{k-1} + G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T \quad (12)$$

なお、行列 F_k, G_k はそれぞれ (4), (5) 式で計算する。

さて、(11) 式と (6) 式が等しいことに注目し、(3) 式から (11) 式を引くことで、状態予測誤差 $\tilde{x}_{k|k-1} := x_k - \hat{x}_{k|k-1}$ を次式で与えることができる。

$$\tilde{x}_{k|k-1} \approx F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + w_{k-1} \quad (13)$$

3.3 パラメータ推定ステップ

パラメータ推定式 (8) は次のように展開できる。

$$\hat{p}_{k-1}^* = \hat{p}_{k-1} + M_k H_k \tilde{x}_{k|k-1} + M_k v_k \quad (14)$$

ここで、更新後のパラメータ推定誤差を $\tilde{p}_{k-1}^* := p_{k-1} - \hat{p}_{k-1}^*$ で定義すると、(14) 式に (13) 式を代入することで次式を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{k-1}^* &= \{I - M_k (H_k G_k)\} \tilde{p}_{k-1} \\ &\quad + M_k \{v_k - H_k (F_k \tilde{x}_{k-1} + w_{k-1})\} \\ &= \{I - M_k (H_k G_k)\} \tilde{p}_{k-1} + M_k e_k \end{aligned} \quad (15)$$

なお、(15) 式の e_k は次式で与えるものである。

$$e_k = v_k - H_k (F_k \tilde{x}_{k-1} + w_{k-1}) \quad (16)$$

ここで、時刻 $k-1$ の推定値 \hat{x}_{k-1} が不偏推定値であると仮定し、 w_{k-1}, v_k は平均 0 のガウス雑音であることに注意すると、 $\mathbb{E}[e_k] = 0$ が成り立つ。よって、 $M_k (H_k G_k) = I$ を満足するように、最適ゲイン M_k を設計すると $\mathbb{E}[\tilde{p}_{k-1}^*] = 0$ が成立する。つまり、更新後のパラメータ推定値 \hat{p}_{k-1}^* は不偏推定値になる。さらに、文献 [11] に従えば、最小分散推定を実現するための最適ゲイン M_k は次式で与えることができる。

$$M_k = \{(H_k G_k)^T P_{k-1}^{ee} (H_k G_k)^{-1}\}^{-1} (H_k G_k)^T P_{k-1}^{ee} \quad (17)$$

ここで、(17) 式を計算するには、条件 $\text{rank}(H_k G_k) = 1$ を満足する必要があることに注意されたい。また、(17) 式における P^{ee} は次式で与えられる。

$$P_{k-1}^{ee} = \mathbb{E}[e_k e_k^T] = H_k P_{k|k-1}^{xx} H_k^T + R_k \quad (18)$$

さらに、(15) 式を利用すると、更新後のパラメータ推定値の共分散行列 $P_{k-1}^{p^*}$ を次式で与えることができる。

$$P_{k-1}^{p^*} = \mathbb{E}[\tilde{p}_{k-1}^* \tilde{p}_{k-1}^{*T}] = M_k P_{k-1}^{ee} M_k^T \quad (19)$$

3.4 状態予測ステップ (2)

時刻 k の観測値 y_k を利用して更新したパラメータ推定値 \hat{p}_{k-1}^* を利用して, (9) 式で $\hat{x}_{k|k-1}^*$ を算出する。なお, (9) 式を利用するのは後の解析を容易にするためである。よって, 状態推定ステップ (1) にならって,

$$\hat{x}_{k|k-1}^* = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_{x,i} \{f(\mathcal{X}_i, \hat{p}_{k-1}^*) + g(\mathcal{X}_i)u_{k-1}\} \quad (20)$$

で状態予測値を更新しても良い。ただし, 計算負荷が多量増加することには注意が必要である。

3.5 状態推定ステップ

(10) 式に (9) 式を代入すると次式を得る。

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1}^* + N_k H_k \tilde{x}_{k|k-1}^* + N_k v_k \quad (21)$$

なお, 上式における状態予測誤差 $\tilde{x}_{k|k-1}^* := x_k - \hat{x}_{k|k-1}^*$ は次式で与えることができる。

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k|k-1}^* &= x_k - \{ \hat{x}_{k|k-1} + G_k (\hat{p}_{k-1}^* - \hat{p}_{k-1}) \} \\ &= \tilde{x}_{k|k-1} - G_k (\hat{p}_{k-1}^* - \hat{p}_{k-1}) \\ &= F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1}^* + w_{k-1} \end{aligned} \quad (22)$$

以上の準備の下, 状態推定誤差 $\tilde{x}_k := x_k - \hat{x}_{k|k}$ は次式で与えることができる。

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= (I - N_k H_k) \tilde{x}_{k|k-1}^* - N_k v_k \\ &= (I - N_k H_k) (F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1}^* + w_{k-1}) - N_k v_k \\ &= (I - N_k H_k) F_k \tilde{x}_{k-1} + (I - N_k H_k) G_k \tilde{p}_{k-1}^* \\ &\quad + (I - N_k H_k) w_{k-1} - N_k v_k \end{aligned} \quad (23)$$

ここで, w_{k-1}, v_k は平均 0 のガウス雑音であることに注意すると, 状態推定誤差 \tilde{x}_k の期待値を次式のように整理できる。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{x}_k] &= (I - N_k H_k) F_k \mathbb{E}[\tilde{x}_{k-1}] \\ &\quad + (I - N_k H_k) G_k \mathbb{E}[\tilde{p}_{k-1}^*] \end{aligned} \quad (24)$$

ゆえに, $(I - N_k H_k) G_k = 0$ を満足するように状態推定ゲイン N_k を設計できれば, 状態推定誤差 \tilde{x}_k はパラメータ推定誤差 \tilde{p}_{k-1}^* の影響を受けないことが分かる。さらに, $(I - N_k H_k) F_k = 0$ が成立することを仮定すると, (23) 式より状態推定誤差共分散行列を次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_{k|k}^{xx} &= \mathbb{E}[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T] \\ &= (I - N_k H_k) P_{k|k-1}^{xx} (I - N_k H_k)^T + N_k R_k N_k^T \end{aligned} \quad (25)$$

以上より, 次の拘束条件付きの最適化問題を解くことで, 最小分散不偏推定を実現する状態推定ゲイン N_k を得ることができる。

$$\arg \min_{N_k} \text{Tr}(P_{k|k}^{xx}) \quad \text{s.t.} \quad (I - N_k H_k) G_k = 0 \quad (26)$$

ここで $\text{Tr}(A)$ は行列 A のトレースを意味する。(26) 式はラグランジュの未定乗数法を利用することで解析的に解くことができ, 最適ゲイン N_k は次式で与えることができる。

$$\begin{aligned} N_k &= K_k - \{K_k (H_k G_k) - G_k\} \\ &\quad \times \left\{ (H_k G_k)^T \left(P_{k|k-1}^{yy} \right)^{-1} (H_k G_k) \right\}^{-1} \\ &\quad \times (H_k G_k)^T \left(P_{k|k-1}^{yy} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (27)$$

$$K_k = P_{k|k-1}^{xx} H_k^T \left(P_{k|k-1}^{yy} \right)^{-1} \quad (28)$$

$$P_{k|k-1}^{yy} = H_k P_{k|k-1}^{xx} H_k^T + R_k \quad (29)$$

なお, 最適ゲイン N_k の導出過程の詳細は文献 [5] を参照されたい。

3.6 アルゴリズムのまとめ

演算開始時刻を $k-1$ として, 具体的な演算手順を以下に示す。なお, 時刻 $k=0$ における初期化方法は通常の KF と同様である。

- i). (4), (5) にて線形化行列 F_k, G_k を計算する。
- ii). (11), (12) にて $\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}^{xx}$ を計算する。
- iii). (17) にてパラメータ推定ゲイン M_k を計算する。
- iv). (8) で未知パラメータの推定値 \hat{p}_{k-1}^* を計算する。
- v). (9) にて状態予測値 $\hat{x}_{k|k-1}^*$ を計算する。
- vi). (27)~(29) にて最適ゲイン N_k を計算する。
- vii). (10) にて状態量の推定値 $\hat{x}_{k|k}$ を計算する。
- viii). (25) にて状態量の推定誤差共分散 $P_{k|k}^{xx}$ を計算する。
- ix). 時刻を 1 つ進めて, i) ステップに戻る。

4. 実機適用にむけた工夫

本章では, 3. 節で紹介した近似最小分散不偏フィルタを実機適用するにあたってのいくつかの工夫方法を紹介する。

4.1 未知パラメータのノミナル値が既知の場合

文献 [6] に示した通り, 近似最小分散不偏フィルタは推定初期値に対するロバスト性がやや低い傾向がみられる。このため, 産業界で広く利用されている Joint 推定に比べても推定精度が劣る場合がある。このような状況では, 未知パラメータそのものを推定するのではなく, ノミナル値からの変動量を推定する構成を採用すると精度の良い推定結果が得られることが多い。つまり, 未知パラメータ p_k がノミナル値 p_k^{nom} と変動量 \check{p}_k によって,

$$p_k = p_k^{nom} + \check{p}_k \quad (30)$$

で表現されるものとし, \check{p}_k を推定する問題として定式化する。このような表記を採用することで, USL は $(\hat{x}_{k-1}, p_k^{nom})$ で実行されるため, 線形化誤差が極端に大きくなることを回避できる。なお, 本形式での近似最小分散不偏フィルタの導出は文献 [6] を参照されたい。

4.2 非線形観測システムへの対応

3. 章では、(2) 式に示した線形観測システムを前提としていた。しかし、実際には、次式で与えられる非線形観測システムを扱う場合も想定される。

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (31)$$

このような非線形観測システムを扱う場合には、前章のアルゴリズムがやや複雑になる。詳細な導出は紙面の関係で割愛し、変更箇所だけを紹介する。詳細は文献 [11] を参照されたい。

まず、パラメータ推定ステップにおける (8) 式を次のように書き換える。

$$\hat{p}_{k-1}^* = \hat{p}_{k-1} + M_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (32)$$

(32) 式における $\hat{y}_{k|k-1}$ は次式で与えられる。

$$\hat{y}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i h(\mathcal{X}_i) \quad (33)$$

ここで、 \mathcal{X}_i は $N(\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}^{xx})$ に従って生成したシグマ点列である。さらに、パラメータ推定ゲイン (17) を求める際に利用する H_k は (31) 式を $\hat{x}_{k|k-1}$ 周りで線形化した際の H_k を利用する。

$$y_k \approx H_k (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) + \hat{y}_{k|k-1} + v_k \quad (34)$$

この線形化は EKF の考え方と同様に Taylor 展開を利用した局所線形化でもよいが、USL を利用することが望ましい。

同様に、状態推定ステップにおける (10) 式を次のように書き換える。

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1}^* + N_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}^*) \quad (35)$$

(35) 式における $\hat{y}_{k|k-1}^*$ は次式で与えられる。

$$\hat{y}_{k|k-1}^* = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i h(\mathcal{X}_i^*) \quad (36)$$

ここで、 \mathcal{X}_i^* は $N(\hat{x}_{k|k-1}^*, P_{k|k-1}^{xx})$ に従って生成したシグマ点列である。さらに、状態推定ゲイン (27) を求める際に利用する H_k は (31) 式を $\hat{x}_{k|k-1}^*$ 周りで線形化した際の H_k を利用する。

$$y_k \approx H_k (x_k - \hat{x}_{k|k-1}^*) + \hat{y}_{k|k-1}^* + v_k \quad (37)$$

以上のように、非線形観測システムを扱う場合には、2つの異なる状態推定値 ($\hat{x}_{k|k-1}$, $\hat{x}_{k|k-1}^*$) での線形化を行う必要があるため、やや計算量が増加することに注意されたい。

4.3 ロバスト近似最小分散不偏フィルタ

3. 節で紹介した近似最小分散不偏フィルタは線形化の誤差の影響を考慮していない。しかし、非線形が非常に

強いシステムにおいては、線形化誤差の影響が推定精度の大きな影響を及ぼし得る。そこで、本節にて、線形化を陽に考慮したロバスト近似最小分散不偏フィルタについて紹介する。

まず、ロバスト近似最小分散不偏フィルタでは、 $\Delta_k \Delta_k^T \leq I$ を満足する時変の未知行列 $\Delta_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ と未知行列 $E_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を用いて、予測誤差のダイナミクス (13) を次式のように書き換える。

$$\tilde{x}_{k|k-1} = F_k (I_{n \times n} + \Delta_k E_k) \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + w_{k-1} \quad (38)$$

(38) 式より予測誤差共分散行列は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^{xx} &= \mathbb{E} [\tilde{x}_{k|k-1} \cdot \tilde{x}_{k|k-1}^T] \\ &= F_k (I + \Delta_k E_k) P_{k-1}^{xx} \\ &\quad \times \{F_k (I + \Delta_k E_k)\}^T + Q_{k-1} + G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T \\ &= P_{k|k-1}^{uu} + G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T \end{aligned} \quad (39)$$

上式において $P_{k|k-1}^{uu}$ は未知行列 Δ_k, E_k を含むため、実際には計算することができない。そこで、 $P_{k|k-1}^{uu}$ の上限 $\Sigma_{k|k-1}^{uu}$ を計算することによって、 $P_{k|k-1}^{xx}$ の上限 $\Sigma_{k|k-1}^{xx}$ を算出する方策を採用する。紙面の関係で詳細な議論は文献 [6] 任せるが、

$$\eta I - E_{k-1} P_{k-1}^{xx} E_{k-1}^T > 0, \quad \eta > 1 \quad (40)$$

を満足する正のスカラー値 η の存在を仮定することにより、

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^{uu} &\leq (1 - \eta^{-1})^{-1} F_k P_{k-1}^{xx} F_k^T + \eta F_k F_k^T + Q_{k-1} \\ &=: \Sigma_{k|k-1}^{uu} \end{aligned} \quad (41)$$

を得る。この正のスカラー値 η は実装時には設計パラメータとして扱われる。故に、 $P_{k|k-1}^{xx}$ の上限 $\Sigma_{k|k-1}^{xx}$ は

$$\Sigma_{k|k-1}^{xx} = \Sigma_{k|k-1}^{uu} + G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T \quad (42)$$

で与えることができる。共分散行列 $P_{k|k-1}^{xx}$ の代わりに、その上限値 $\Sigma_{k|k-1}^{xx}$ を利用して、パラメータ推定ゲイン M_k 、および、状態推定ゲイン N_k を算出するアルゴリズムがロバスト近似最小分散不偏フィルタである。

4.4 適応ロバスト近似最小分散不偏フィルタ

設計パラメータ η を適切に設計することができれば、ロバスト近似最小分散不偏フィルタは近似最小分散不偏フィルタに比べて、良好な推定精度を示すだけでなく、推定初期値に関するロバスト性が大きく改善される。しかしながら、設計パラメータ η には明確な設計指針がなく、試行錯誤でパラメータを選定する必要があった。そこで、本節では、観測誤差共分散行列を利用した適応則を利用することにより、設計パラメータ η を自動的に調整する方法を紹介する。

まず、観測誤差共分散の上限値 $\Sigma_{k|k-1}^{yy}$ は次のように展開できる。

$$\begin{aligned}\Sigma_{k|k-1}^{yy} &= H_k \left\{ P_{k|k-1}^{uu} + G_k \Sigma_{k-1}^{pp} G_k^T \right\} H_k^T + R_k \\ &= H_k \left\{ (1-\eta^{-1})^{-1} F_k \Sigma_{k-1}^{xx} F_k^T + \eta F_k F_k^T \right\} H_k \\ &\quad + H_k \left(G_k \Sigma_{k-1}^{pp} G_k^T \right) H_k^T + R_k\end{aligned}\quad (43)$$

一方、観測誤差共分散行列 P_k^{yy} はイノベーション $\nu_k = y_k - \hat{y}_{k|k-1}$ を用いて、次式で近似することができる。

$$P_k^{yy,o} = \begin{cases} \nu_1 \nu_1^T & (k=1) \\ \frac{\rho P_{k-1}^{yy,o} + \nu_k \nu_k^T}{\rho+1} & (k>1) \end{cases}\quad (44)$$

なお、 ρ ($0 < \rho < 1$) は忘却係数である。

$\Sigma_{k|k-1}^{yy}$ は $P_{k|k-1}^{yy}$ の上限値であるので、次式を満たすように η を決定することを考える。

$$\text{Tr}(\Sigma_{k|k-1}^{yy}) = \text{Tr}(P_k^{yy,o})\quad (45)$$

つまり、フロベニウスノルムを最小化する η を設計する問題を考える。(43)式を利用すると、上式は次のように展開できる。

$$\begin{aligned}(1-\eta^{-1})^{-1} \text{Tr}(H_k F_k \Sigma_{k-1}^{xx} F_k^T H_k^T) + \eta \text{Tr}(H_k F_k F_k^T H_k^T) \\ + \left[\text{Tr}\left\{ H_k \left(G_k \Sigma_{k-1}^{pp} G_k^T \right) H_k^T + R_k \right\} - \text{Tr}(P_k^{yy,o}) \right] = 0\end{aligned}\quad (46)$$

各トレースの値を a, b, c と表記すると、次式を得る。

$$(1-\eta^{-1})^{-1} a + \eta b + c = 0\quad (47)$$

上式は η に関する2次方程式であるので、次式で η を与えることができる。

$$\eta = \frac{(a+b-c) \pm \sqrt{(a+b-c)^2 + 4bc}}{2b}\quad (48)$$

なお、 $\eta > 1$ を仮定しているため、適応則を利用する際には、 $\eta_{min} > 1$ を与えて

$$\eta = \max\left(\frac{a+b-c + \sqrt{(a+b-c)^2 + 4bc}}{2b}, \eta_{min}\right)\quad (49)$$

とすることが望ましい。

5. 数値シミュレーション

5.1 シミュレーション対象

紹介したロバストフィルタの有効性を示すため、誘導モータモデルのシミュレーションを考える[5]。連続時間ダイナミクスをサンプリング周期 Δt で離散化すると、非線形ダイナミクスを次式で与えることができる。

$$\begin{aligned}f(x_{k-1}, p_{k-1}) + g(x_{k-1})u_{k-1} = x_{k-1} + \Delta t \times \\ \begin{bmatrix} -\gamma x_{1,k-1} + \frac{K}{T_r} x_{3,k-1} + K p x_{5,k-1} x_{4,k-1} + \frac{1}{\sigma L_x} u_{1,k} \\ -\gamma x_{2,k-1} + \frac{K}{T_r} x_{4,k-1} - K p x_{5,k-1} x_{3,k-1} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{2,k} \\ \frac{M}{T_r} x_{1,k-1} - \frac{1}{T_r} x_{3,k-1} - p x_{5,k-1} x_{4,k-1} \\ \frac{M}{T_r} x_{2,k-1} - \frac{1}{T_r} x_{4,k-1} + p x_{5,k-1} x_{3,k-1} \\ \frac{pM}{JL_r} (x_{3,k-1} x_{2,k-1} - x_{4,k-1} x_{1,k-1}) - \frac{T_r}{J} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (50)$$

なお、 x_1, x_2 は固定子電流、 x_3, x_4 は回転子磁束、 x_5 は角速度である。(50)式における入力信号 u_k は次式で与えるものである。

$$u_{1,k} = 350 \cos(0.003k), \quad u_{2,k} = 300 \sin(0.003k)$$

観測方程式は線形モデルとし、観測行列 H_k を次式で与える。

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (51)$$

また、プロセスノイズ w_k 、観測ノイズ v_k はそれぞれ平均値0のガウス雑音であり、その共分散行列は次式に従うものである。

$$Q_k = 0.01^2 I_5, \quad R_k = 0.1^2 I_2$$

(50)式中に現れる定数 T_r, σ, K, γ の定義は次の通りである。

$$\begin{aligned}T_r &= \frac{L_r}{R_r}, \quad \sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}, \quad K = \frac{M}{\sigma L_s L_r} \\ \gamma &= \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r}\end{aligned}$$

ここで、各パラメータのノミナル値と定義を第1表にまとめた。なお、本稿ではパラメータ γ が未知であると仮定する。

第1表 Simulation parameters

Parameter	Value
R_s	Stator Resistance 0.18[Ω]
R_r	Rotor Resistance 0.15[Ω]
L_s	Stator Inductance 0.0699 [H]
L_r	Rotor Inductance 0.0699 [H]
M	Mutual Inductance 0.068[H]
J	Rotor Inertia 0.0586 [kg · m ²]
T_l	Load Torque 10 [Nm]
p	Pole Pairs 1[-]
Δt	Step size 0.0001[s]

本節では、次の4つの非線形フィルタを使って、それぞれシミュレーションを行い、推定精度を比較する。

JUKF (Joint UKF)

未知パラメータ γ を含めた拡大系に UKF を適用したものの (Joint 推定)

AUMV

3.章で紹介した近似最小分散不偏フィルタ (ただし、4.1節に示したパラメータ変動量を推定する形式とした)

RAUMV (Robust AUMV)

4.3節で紹介したロバスト近似最小分散不偏フィルタ

ARAUMV (Adaptive RAUMV)

4.4節で紹介した適応ロバスト近似最小分散不偏フィ

ルタ

5.2 シミュレーション結果

本節におけるシミュレーション初期条件として、状態初期値 x_0 、状態量推定初期値 \hat{x}_0 および共分散行列 P_0^{xx} をそれぞれ次の通りとする。

$$x_0 = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 10 \\ 10 \\ 200 \end{bmatrix}, P_0^{xx} (= \Sigma_0^{xx}) = 10^4 I_5 \quad (52)$$

また、JUKF で必要となる拡大系の状態量及び共分散行列の初期値は次の通りとする。

$$\hat{x}_{6,0} = \gamma^{\text{nom}}, P_{(6,6),0}^{xx} = 10^1$$

なお、 γ^{nom} は第1表に示したパラメータで計算される γ のノミナル値であり、 $\gamma^{\text{nom}} = 50.7$ となる。

さらに、RAUMV に利用する正のスカラ値 η 、スケーリング行列 B_k を次式で与える。

$$\eta = 100, B_k = \frac{1}{\eta} F_k \quad (53)$$

なお、パラメータ η は試行錯誤によって決定した。

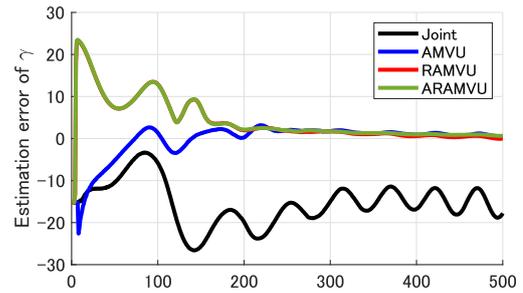
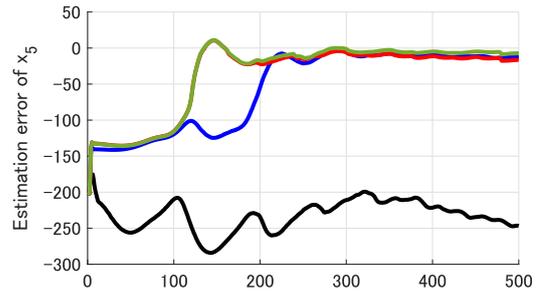
未知パラメータ γ は2通りの値 ($[1]\gamma = 0.7\gamma^{\text{nom}}$, $[2]\gamma = 1.3\gamma^{\text{nom}}$) をとるものとし、各パラメータ値においてフィルタの推定精度を検証した。なお、未知パラメータ γ は1回のシミュレーション中に値を変更しないものとする。

第2表はパラメータ真値を $\gamma = 0.7\gamma^{\text{nom}}$ としたときの、50回のモンテカルロシミュレーションを行った結果のRMSEをまとめたものである。なお、 x_6 は未知パラメータ γ の推定結果を示している。

第2表 RMSE of each state

	JUKF	AUMV	RAUMV	ARAMVU
x_1	2.23	2.23	2.23	2.23
x_2	2.23	2.23	2.23	2.23
x_3	8.26	5.84	4.86	4.78
x_4	6.97	5.23	4.42	4.36
x_5	255	86.3	72.7	69.5
x_6	18.5	4.84	7.09	7.00

第2表を見ると、全ての状態量の推定精度で適応則を利用した提案手法である ARAMVU が最も優れることが確認できる。ただし、パラメータ推定値は AUMV が最も優れている。これは AUMV のみパラメータ変動量 \check{p}_k を推定する形式にしたことが影響している可能性がある。第1図に状態量 x_5 と未知パラメータ $\gamma (= x_6)$ の推定誤差の時系列を示した。図中の青線が近似最小分散不偏フィルタの推定誤差であり、赤線がロバスト近似最小分散不偏フィルタ、緑線が適応ロバスト近似最小分散不偏フィルタ、黒線が JUKF の推定誤差の波形である。



第1図 Estimation error of state and paramter

JUKF では推定結果が収束しない条件においても、提案手法のいずれでも推定誤差が収束方向にあることが確認できる。さらに、適応則を利用した ARAMVU は適応則を利用しない RAUMV よりも誤差が小さいことが確認できる。

第3表はパラメータ真値を $\gamma = 1.3\gamma^{\text{nom}}$ としたときの、50回のモンテカルロシミュレーションを行った結果のRMSEをまとめたものである。

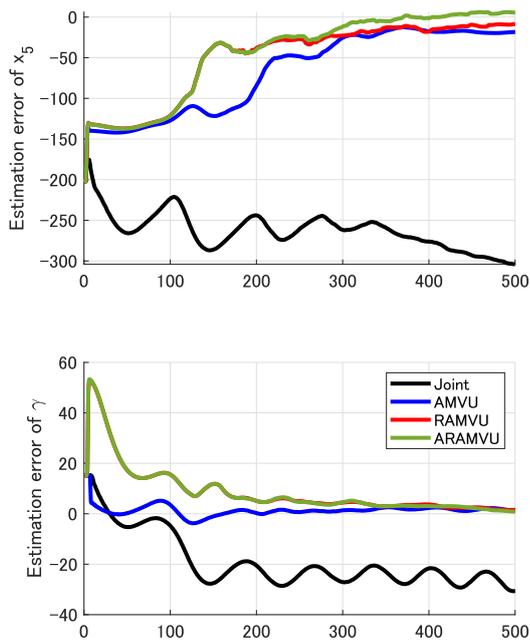
第3表 RMSE of each state

	JUKF	AUMV	RAUMV	ARAMVU
x_1	2.23	2.23	2.23	2.23
x_2	2.23	2.23	2.23	2.23
x_3	8.05	6.13	5.65	5.57
x_4	6.75	5.46	5.06	5.01
x_5	268	93.8	90.6	89.5
x_6	22.6	4.47	14.3	14.2

第3表を見ると、第2表と同様に、状態量の推定精度ともに適応則を利用した ARAMVU が最も優れることが確認できる。第2図に状態量 x_5 とパラメータの推定誤差の時系列を示した。このように、パラメータ真値が異なる場合でも、ほぼ同様の傾向が確認できる。

6. おわりに

本解説では、状態推定手法を実際に適用する際に課題になりえる、モデルの不確かさを扱う一手法として、著者が検討している近似最小分散不偏フィルタについて紹



第 2 図 Estimation error of state and paramter

介した。

近似最小分散不偏フィルタでは、状態量推定ゲインの設計問題を、パラメータ推定誤差が状態量の推定誤差ダイナミクスに影響を与えない条件を拘束条件とした最適化問題を利用している。このため、Dual 推定や Joint 推定において生じる推定過渡期における状態量の推定値とパラメータの推定値が互いに影響する状況を緩和することができる点に利点がある。

また、本解説では、近似最小分散不偏フィルタを実問題に適用するためにフィルタのロバスト化を狙った、ロバスト近似最小分散不偏フィルタを紹介するとともに、ロバスト近似最小分散不偏フィルタの設計パラメータを自動調整する方法の紹介も行った。

本解説が状態推定問題に取り組む研究者、技術者の一助になれば幸いである。

参考文献

- [1] 片山 徹：非線形カルマンフィルタ；朝倉書店(2011)
 [2] 足立 修一，丸田 一郎：カルマンフィルタの基礎；東京電

機大学出版社(2012)

- [3] Dan Simon: *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ and Nonlinear Approaches*; Wiley-Interscience (2006)
 [4] Arasaratnam, Ienkaran, Simon Haykin : Cubature kalman filters; *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol.54, No.6, pp.1254-1269 (2009)
 [5] 石原新士，山北昌毅：パラメータ不確かさを有する非線形システムにおけるロバストカルマンフィルタ；計測自動制御学会論文集，53 巻，10 号，pp.527-538，(2017)
 [6] 石原新士，山北昌毅：ロバスト近似最小分散不偏フィルタによる状態量とパラメータの同時推定手法；計測自動制御学会論文集，54 巻，4 号，pp.389-401，(2018)
 [7] Zhiwei Gao, Carlo Cecati, Steven X. Ding : A Survey of Fault Diagnosis and Fault Tolerant Techniques Part I: Fault Diagnosis With Model Based and Signal Based Approaches; *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 62, No. 6, pp.3757-3767 (2015)
 [8] Wan, Eric A., Van Der Merwe, R. : The unscented Kalman filter for nonlinear estimation; *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*, pp.153-158,(2000)
 [9] K.Xiong, H.Y.Zhang, C.W.Chan : Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering; *Automatica*, Vol.42-2 ,pp.261-270 (2006).
 [10] Masaya Murata, Hidehisa Nagano, Kunio Kashino: Unscented Statistical Linearization and Robustified Kalman Filter for Nonlinear Systems with Parameter Uncertainties; *Proceedings of the 2014 American Control Conference*, pp.5079-5084 (2014)
 [11] S. Ishihara and M. Yamakita: Approximated unbiased minimum-variance simultaneous states and parameters estimation for nonlinear systems; *Proceedings of the 2017 IFAC World Congress*, pp.1643-1648 (2017)

著者略歴

いしはら しんじ 石原 新士 (正会員)



1985 年 2 月生。2007 年 3 月東京工業大学院理工学研究科制御システム修士修了。同年 4 月株式会社日立製作所入社。2017 年 9 月東京工業大学院理工学研究科制御システム博士課程修了。非線形システムの状態推定の研究に従事。博士（工学）。計測制御自動制御学会の会員。

「確率システムシンポジウム 50 回記念」

随 想

SSS50 回記念「思い出 - 回想」随想集

および SSS に関連する受賞者・受賞論文名

SSS 参加者

1. SSS50 回記念「思い出 - 回想」随想集

1.1 榎木義一先生と私

徳島大学名誉教授 添田 喬

1.1.1 原爆と広島

昭和 24 年、私は廃墟と化した広島文理科大学を終え広島大学の助手になった。恩師は通勤途中原爆に会い、電車の中から川へ飛び込み九死に一生を得た森永覚太郎先生である。大学では自然幾何学の勉強をした。これは動座標の学問であるが歯車の理論に結び付く分野である。森永先生は教授になられてから 20 年、家族を愛媛に帰し一人不自由な下宿生活を続けていたが、定年後郷里へ帰り勉強部屋もできたし、やっと人間らしい生活がでると喜んでいて矢先肺炎で亡くなってしまった。原爆被害のやけど(ケロイド)はいつまでも残っていた。

1.1.2 応用数学会と城憲三先生

昭和 26 年、応用数学会で、城先生は、これからはコンピュータ、非線形振動論、自動制御などが重要になるのではないかということをお話された。先生は真空管の電子計算機の研究をされていた。

当時は、専門学校と大学の切り替わりの時期で、専門学校にいる先生は学位がないと大学に残れないといわれ、年齢に関係なく、万年助手ということなどで、みな、つてを探して学位の取得方法を考えていた時代であった。先生の資格はすべて文部省で行った。

20 歳代の私たちは、研究のしはじめだったのでまだ気分的には余裕があったが、50 歳程度で今まで高専の教授と言われた先生がいきなり助手に降格なので悲壮感もあった。

徳島大学工学部の仁田先生の紹介で京大の林千博先生を知り、榎木先生にお世話になることになった。

1.1.3 新しい専門分野への取り組み

昭和 27 年、京都大学オートメーション研究施設が京都市の修学院にあったが、私はそこで砂原善文先生から直接指導を受けることになった。当時先生は榎木先生の助手であった。

私は、初めて研究室を訪ねた時はゼミナールの最中であり、黒板には四角の枠、矢印、非線形、などが書かれ

活発な討論が行われていた。予備知識一つない私にとっては全く別世界に入った感じであった。そのとき一編の論文(1945年)コピーを頂いたがそれがこれからの研究の端緒になった Wiener の論文であった。内容は勿論それが自動制御とどういう関係にあるかもわからず、本当に悲壮な思いで研究室通いをしたことを覚えている。

研究室には、当時大学院の学生であった中溝高好先生がおられいろいろな面で指導や励ましをいただくことになった。今でもお付き合いを続けている。

昭和 32 年から 2 年間、私は、日本学術研究振興会流動研究員として京都大学榎木先生の下で指導を受けた。当時、学位論文を作成していた砂原先生の手伝い、文献の調査、紹介、校正、下書き等が続けた。分からないことだらけだったが、隣の中溝先生にきめ細かに教えていただいたことが印象にある。ずいぶんご迷惑をかけた。今思うと、毎月榎木先生を中心に研究会が行われたが、そこには同志社大、立命館大、京都工芸繊維大の先生方がご一緒だった。

本当に夜遅くまで研究室で頑張ったと思う。文献をまとめ、学会の講習会の原稿づくりにも手伝わせてもらった。関係する文献で読まないものはないと自負するほど必死になって調査を行った。ロシア語やスペイン語などを聞くために大使館や宣教師のところへ通ったこともあった。具体的に、私のテーマは飛翔体や水中翼船のような非線形システムが突風の様な外乱を受けた時飛翔体はどのような動きをするかまたそれをもとへ返すには制御装置をどうするかを統計的等価線形化手法を用いて解析した。

そのうち私の研究は非定常非正規外乱をうける非線形システムの解析が中心になるように思えてきた。立命館の塚本幸雄先生らはアナログ計算機を組み立て実験で理論の結果を確認していた。そのうち研究室には小野敏郎先生が入られ文献整理や計算機プログラミングの手伝いをしてくれた。砂原先生の指導の下、中溝、小野両先生のご支援により私の学位論文もまとまった。

当時は、日本機械学会の論文集をあけると毎回どこかに私たちの論文が掲載されていたと思う。そのお陰で、徳島大学の芳村敏夫(徳大工学部長)、田上重美(徳大教授)、原敬(同志社大教授)、富田豊(呉工学部教授)先生らが学位を授与された。昭和 50 年には、芳村先生と

もに日本機械学会論文賞をいただいた。また、秋月影雄先生が榎木先生の研究会に出席されるようになり、有意義な話題を提供された。

いまでこそノイズや外乱という用語はごく自然に使われているが、それをいかに除去するかがあらゆる問題の基礎であろう

1.1.4 様々な問題

(1) 環境問題

環境問題は永遠に続くように思われる。榎木先生は熱心に取り組みました。まず、環境汚染物質濃度の予測と制御である。昭和40年から50年にかけて榎木研究室を上げて取り組んできた。リモートセンシングの考えを使い、測定局で計測した実際のデータから統計的モデルを作り、その予測精度の良さを実データを用いて確認した。従来の拡散方程式を中心とした物理モデルに対し、ここで提案したモデルは非物理モデルと称した。次に、従来に比べより精度の良い予測モデルとしてGMDH(非線形モデル)の応用を試みた。これらの成果は国内外の学会に掲載されたが、昭和52年IIASAで、イタリアのフロンザ教授らとミラノで計測されたデータにより共同研がなされた。それが縁でインドの国有鉄道(RDSO)から、開発したプログラムを鉄道レールの亀裂予測や洪水予測に応用したいという要請があり、インドのラクノウに大松繁先生、芳村敏夫先生等と出張した。

(2) エネルギー問題

環境問題と並行してエネルギー問題に取り組んだ。特に、ごみ焼却炉の排熱を利用したハウス栽培の方法、システムダイナミックによる年齢別人口の推移、地域別産業の振興育成について実質的な成果を上げた。

経済性を考慮したローカルクリーンエネルギーの実用化は社会のために貢献すると思われる。オーストリアのIIASAから共同研究の提案があり大松繁、馬場則夫先生らが参加した。その後も芳村敏夫、大恵俊一郎先生等が出張され研究成果を交代で発表した。IIASAは榎木先生が役員をした国際的なシンクタンクであるが他国からの研究者と本当によく議論を交わした。いろいろな方の面影が目に見え浮かぶ。

(3) 気候感度と最適化問題

気候科学の気候感度とは大気中のCO₂濃度が2倍になるときの大気温度の上昇の値をしめす。気候科学は未知パラメータが多く確率的な方法で推定する以外に方法はなかったが、当時の東京大学茅陽一先生の好意で研究費の交付を受け、仁田工吉、沖津泰先生らと実験的な方法での解決をこころみた。最初は経済性に主眼を置いた。UCSDのソレンソン教授のもとには、推定論、最適解、線形化法のことで3回お邪魔した。一度は東京工業大学の古田勝久先生とご一緒だった。

1.1.5 環境統計整備のための基礎的問題の研究

東京大学 豊田弘道、甘利俊一、竹内宏、内藤正明(京都大学)の諸先生らとの共同研究に参加させていた

だき、予測モデルやモニタリングステーションの見直しや最適配置問題を分担。公害研究所では近藤次郎、寺尾満先生、松本幸雄先生等のご指導をいただいた。また県別だった水質検査の全国統一化が藤原主任研究官の下で実現した。

1.1.6 日本機械学会プラント異常診断、寿命予測

京都大学得丸英勝、井上紘一、中溝高好、早稲田大学秋月影雄先生らが中心になって行ったが、徳大関係の芳村敏夫、大松繁、田淵敏明先生をはじめ中条義輝(文理大)、渡辺桂吾(岡山大)先生方のご指導をいただいた。

コンピュータによる対話型意思決定支援システムの開発研究も特徴の一つである。

1.1.7 NPO 法人シニアパワーネットワークとくしま設立

平成12年、介護保険の導入を機に高齢者のための生きがい対策事業(余暇有効利用)を行うためNPO法人を徳島市の産官学で立ちあげた。20年続いている。具体的内容は、

- (1) 高齢者をよみがえらせる対話型シニアパソコン教室講師は徳大、文理大、四国大教員OB、サポータは講習を受けた主婦やボランティア受講生は60歳以上最初の受講者は90歳を超えた。サポータの育成には総務省の支援を受けた
- (2) ICT事業(高齢者の交通事故予防対策、自動車短大で2級整備士資格取得)
- (3) ささやか支援福祉事業(吉野川河川敷、花壇づくり)
- (4) シニア新聞発行(年4回、毎回1万5千部)
- (5) 講演研究会(名著購読)

場所は 社会福祉協議会、県内病院、同友会支部(一太郎、花子、発祥の地)を借用パソコンの事業内容は ワード、エクセル、パワーポイント、デジカメ散歩等、受講生一人毎週一回2時間8回で1クール(実費負担)、欠員待ちの盛況である。令和2年から理事長はじめ役員交代次世代に移す予定。

1.1.8 大松先生とクンクンボディ

大松先生との付き合いは先生の大学院時代からなので50年になる。徳島大から母校に移ってからでも非常勤で工学部学生の指導に当たっていただいている。いろいろな情報は先生からうかがうことが多い。

この4月から、広島大学の特任教授に就任されたこと。もう一つは、コニカミノルタから売りに出された「クンクンボディ」のことである。スマホによる匂い(におい)測定器を開発し、その特許を取ったという話である。大松先生が実用的な民衆のニーズに応えた製品を開発されたということは素晴らしいことである。

また、最近の研究開発の方式も随分変わってきているということであった。例えば、「学融合」を理念として掲げ、新しい学問領域の教育研究に携わる。或いは、今までにない研究方法により、「科学」と「技術」の複雑性を解明するための教育研究、また、個別学問分野から派生

する未開拓領域等の研究である。

1.1.9 自動制御の普及

自動制御を勉強する学生や技術者は、大学の工学部の実態から、昭和40年ころは3千人程度と思っていたが、日新出版の「わかる自動制御」、「自動制御の講義と演習」の売り上げ状況を見ると今まで両方で50～60版出ているので8万～9万人の方は利用しているように思われる。それは最近フィードバックの考えが工学だけでなく社会科学等にも普及しているためと思われる。

また、最近スクラッチプログラミング、ロボット、カリキュラム、制御、VBA等が、小学校時代から親子で勉強し、講習会に参加したりしているためかもしれない。

榎木研究グループは学生教育にも関心を持ちそれぞれの分野で各自専門を生かし専門書や参考書を執筆することを進めてくれた。出版社と相談し、話がまとまると分野を決めて執筆にとりかかってもらった。本を書くのは論文原稿を作成したり講演原稿を作るのと違って「1週2時間年間15回の授業」あるいは「30回」とすれば、内容をどうするか、どういう表現にするかとかいろいろ工夫しなければならない。そうして話がまとまれば出版にこぎつける。自動制御関連の図書として、理工学基礎シリーズ、実用理工学入門講座座、情報処理基礎シリーズ、わかる工学全書等に分類し多くの方が出版した。その数は20種類程度になる。それ以外に共著書活動としてはコロナ、オーム社 培風館等から「統計的制御理論」、「ランダムデータの統計処理」、「計数・測定」、「いま何をなすべきか」がある。

山川新二さんは私たちの計算プログラムをチェックしてくださった。有難く思っている。また、ご著名な得丸英勝、秋月影雄、太田光雄、柴田浩先生等おられるが十分お礼を申し上げる機会を失ない申し訳なく思っている。

(追記)。申し訳ないのですが60歳の後半から95歳まで研究論文はゼロです。

文科省が昭和40年代に情報工学科とその大学院設置を認め(当時は西日本地区では九州大学と徳島大学のみ)さらに、学長時代に生涯学習のための大学開放実践センターを開設してくれたお陰で、開かれた大学としての使命を果たすことができた。また、日本学術会議も中曽根首相の肝いりで選挙から今の制度に変わった(第13期5部会員)。学長は産官学共同事業の学の代表として、他の分野の方(銀行の頭取、新聞社長、商工会議所会長、医師会長等)とともに知事の県政懇話会の役に付いたりしたので研究らしい研究もしていない。学長職30年(徳島大学、徳島文理大学、倉敷芸術科学大学)です。

最近、私は私立徳島工業短期大学(自動車短大)の理事、学監(非常勤)としてICTシニア事故防止対策事業、国際交流に力を入れ、ベトナム、マレーシア、ミャンマー、中国等からの外国人留学生の受け入れを図っている。中国江蘇省の南通総合大学、医学、南通市とは教員、研究者、職員との国際交流を行っている。

冒頭に述べたように、私は、昭和32年日本学術振興会流動研究員に採用され榎木先生の指導を受けることができた。あれから60年を過ぎた現在、孫が流動研究員に採用され、東京大学の博士課程(新領域創成科学研究科複雑理工学専攻)で勉強を続けている。また、母親は大阪府立大学で学位をいただき徳島文理大学情報デザイン学科の教授になり、いずれも日本自動制御協会でお世話になっていた。心から御礼を申し上げたい。

この度、杉本末雄先生や大松繁先生のご配慮でお誘いを受け執筆してみました。何か申し訳なかったような感じがしています。忸怩たる思いです。お世話になりながらお亡くなりになってしまった先生方のご冥福を心よりお祈りします。

1.2 私にとっての確率システムシンポジウム

早稲田大学名誉教授 秋月影雄

このシンポジウムが50年継続したということはすばらしいことだと思う。「継続は力なり」という言葉があるが、まさにこの分野の研究発展のために寄与した力は大きい。

初期の「統計的制御理論シンポジウム」がはじまった1968年私は34歳、今年85歳を超えて仕事も離れ、散歩や読書に毎日を通して。最近読んだ小説に、直木賞受賞作家の一人「乃南アサ」の「ピリオド」という著作がある。その小説について著書自らが述べている次のようなコンセプトに共感を覚えた。「多くの人の人生には、とりたてて何が起きるといわけではないと思う。それでも、かけがえのない時は流れ、人は自分の人生にいくつかのピリオドを打ちながら進んでいく。進むしかないからこそ振り返りたくなるのだと思う。」

この小説自体の内容とは全く異なるが、私と「確率システムシンポジウム」とのかかわりはまさにその通りであった。毎年、このシンポジウムに研究成果を発表して研究の一つの「」を打ち、時々少しまとまった結果を得て「。」を打ちながら進んできた。そして「、」や「。」を打つ時に結果を振り返り「たいした結果は出せなかった」と思いながら過ごしてきた。

初期の「統計的制御理論シンポジウム」の時代では古典制御理論の一つの分野として、周波数領域で「不規則入力を受ける制御系」に対する議論が主体であった。当然線形近似することで議論され、その正当性の検証のためにシミュレーションが重要で、白色雑音発生器とアナログコンピュータが活躍した時代であった。

その後、制御理論が微分方程式で表現されるダイナミカルシステムに対して展開され、「現代制御理論」と呼ばれるようになると、「統計的制御理論」にもピリオドが打たれ、確率微分方程式で表わされるシステムを対象とした「確率システム」の議論へと移っていった。Ito型確率微分方程式が対象とされたことからこの分野の日本

の研究が注目され、「確率システムシンポジウム」もその発展に大きな役割を果たした。デジタルシミュレーションによる数値解析が広くおこなわれ、この分野の研究は華々しく開花した。

理論的な研究が発展するにつれ、多くの実システムへの適用も検討され、実際のデータの活用に関心が移っていった。実データにもとづく推定・システム同定などから学習へと発展してきている。

元来、我々の世代では、「工学は物理学にもとづいてその対象の挙動を数学的に表現し、その数学モデルにもとづいて議論する」のが本筋とされていたが、この研究態度にも一つのピリオドが打たれたように見える。

今後、この「確率システムシンポジウム」ではどんな議論が展開されていくのだろうか？ 私は人生自体にピリオドを打って別世界からその展開を見守ることになるのだろう。

1.3 確率システムシンポジウム第50回大会によせて

防衛大学校名誉教授 中溝高好

この度「確率システムシンポジウム」第50回大会がとどこうりなく終了したこと、まことにご同慶にたえません。こころよりお慶び申し上げます。

50回といえば歴史は古く、その第1回大会は昭和43年に遡ります。それは半世紀も前であり、まだ1ドルが360円の時代のことです。周知のように京都大学楽友会館において「統計学的制御理論シンポジウム」として第1回大会が開催されました。初期のシンポジウムは、3日間シングルセッションを原則とし、しかも討論を重視した点に特徴がありました。討論を効率的に進めるため、各講演ごとにあらかじめ討論者1名指名する方式が採られました。他人の研究は、わずかな時間の発表を聞いただけではなかなか理解が難しいものもありますが、格式張らない討論が加われば思わぬ勉強になったりしたものでした。その意味で指名された討論者も少なからぬ予習をしていたはずで、このような点が他のシンポジウムとの差別化であり、同時に若手研究者をエンカレッジするものでもありました。第1回大会から第9回大会までの会場は楽友会館で続きます。その間、第7回大会からはその名を「確率システムシンポジウム」と改めました上に、マンネリにならないように開催場所も京都から離れて全国めぐりが始まります。さらに第17回大会からは”Stochastic System Theory and its Applications”(SSS)と改名し、会議言語も英語を中心に、特別講演講師に著名な外国人を招聘するだけでなく、英文のProceedingsを発行するなど、国内シンポジウムとしては高く評価されるものです。このようなユニークなシンポジウムを発足させ、着実に充実発展させることができたのは、第25回大会まで一貫して組織委

員長として手腕を振るわれた砂原善文先生をはじめとし、そのスタッフの方々のご尽力のたまものであると特記しておかねばなりません。また、時には同じ場所に泊まり込み、昼の講演会とは別に夜の好宴会では、忌憚のない意見を交換し合うばかりでなく、人間的なつながりを深めるたすけとなったことも忘れることができません。

この頃、私自身は30歳代から40歳代の多感な時期にあたります。たまたま運悪く、私は日本にいなかったため記念すべきSSS第1回大会には出席していませんが、第2回大会以降第30数回大会までは皆勤賞のほうです。その分いろいろとご迷惑をおかけしたと思いながら、一方では研究生活における私自身の背中をおしていただいたと感謝しております。それにも拘わらずSSSの発展のためは何の貢献もできず寒心のいたりです。

慣習により組織委員長を下番するにあたってはシンポジウム開催の世話をしなければならないということでしたので、第33回大会を、当時私が勤務していた足利工業大学で開催し、委員長の職を片山徹先生にバトンタッチいたしました。私事ながら、たまたまそのころから体調をくずし、その原因の同定に時間がかかり、それ以降のSSSには残念ながら出席する機会がありませんでした。杉本末雄先生からは、しばしばお誘いを受けながら老弱を理由に平然として今日まで来てしまいました。

最後に、50年といえば歴史上おおきな節目であります。人間なら「50にして天命を知る」(論語)とされています。長い経験を積み重ねて天命を理解し、さらに質の高い活躍をするときとしています。SSSも50年を経て、それまでの長い経験と実績を通じて天命を自覚し、新しい令和の時代にふさわしいSSSとしてより一層充実発展されることを祈っています。

1.4 私の確率情報システムへの履歴書

東京電機大学名誉教授 稲葉 博

1.4.1 Kalman Filterの論文は全く理解困難

私は1963年4月に東京電機大学の大学院修士課程に入学しました。その3年前の1960年に彼の有名な離散時間線形システムのKalman Filterの論文[2]が発表され、続いて次の1961年に連続時間のKalman-Bucy Filterの論文[3]が発表されていました。人づてにこれらの論文は非常に画期的かつ多くの研究者から注目されている確率的信号推定に関する論文であると聞き、直ぐにコピーを手に入れたことを記憶しています。早速論文を読み始めたが、とても手に負える内容ではないことを直ぐに知らされた。特にKalman-Bucy Filterの論文は当時の私の数学の力を遙かに超えた内容であり、大きな挫折を味わったことを鮮明に覚えています。

基礎的な数学の力不足を感じていたのは私だけではなく、多くの同僚も同じでした。特に確率の基礎、線形代数、解析学の理解が足りないことを痛感し、直ぐに同僚

を集め、数学の先生を顧問をお願いして、これらを勉強するための輪講を始めたことを思い出しました。先ず確率論は「確率論入門、赤池撰也著 倍風館 1958」をテキストにして数人で開始した。続いて解析学は「函数解析の基礎(コルモゴルフ、フォミン著)、山崎三郎訳、岩波書店、1963」を使って勉強会を週に2回くらいの割合で、さらに夏休みには大学の寮などで1週間くらいの泊まり込みの輪講を続けたように記憶しています。しかし数学の準備のためにKalman Filterに関する研究は全く進まず、修士論文の研究課題をパターン認識(音声認識)に変えて修士を修了することになった[6].

1.4.2 テキサス大学への留学

修士課程を1966年3月に修了予定で、電力中央研究所に就職する内定をもらっていました。大学に入学する前に、北海道電力に就職して発電所関連の仕事に4年間従事し、何度か送変電系統の大きな事故・故障を経験しておりました。そのために、パターン認識の理論を電力系統の故障検出に利用できる可能性があることを面接官に説き、割と簡単に電力中央研究所への採用が決まりました。

しかし私の指導教授から大学に残って助手として研究することを薦められ、結局内定を取り消して大学の助手を選びました。1966年4月に助手になり半年たって、指導教授の薦めもあってテキサス大学への留学の可能性を考慮して、私学研修福祉会の在外研修員への申請をしました。幸い6ヶ月間の在外研修員への採用が決まり、1967年6月の夏学期からテキサス大学の博士課程に入学することができました。しかし、こんなに早く留学の機会が与えられるとは全く想像しておらず、特に英会話の準備は殆どなく、会話や授業の聴講に大変な苦勞・困惑をしたことを思い出します。

入学後は外国人のための英会話クラスなどに通いながら専門科目も受講していたが、幸いにも9月からResearch Assistantにも採用された。そのためテキサス州での就労になり、外国人授業料から州の学生の授業料に変更され、それまでの約4分の1に減額されたこともあって、少し経済的な状況が改善されました。そのため1年前に結婚していた妻を日本から呼び寄せることができ、少し落ち着いて生活ができるようになった。

1969年7月20日にはApollo 11で人類初めての月面着陸が成功し、宇宙工学科に関係する教員や学生はもとより、世界中の人達が祝い一色になりました。さらにその直後の8月13日に長女も生まれ、私にとってはこれまでの緊張した環境から少し余裕のある心境になり、より意欲を持って研究を進めることができるようになったように思います[9].

1.4.3 確率情報システムに関係した研究課題

テキサス大学での指導教授は宇宙工学科の学科長を務めていたByron D. Tapley教授で、NASAとの共同研究などで大変多忙であったが、何時も学生との対話を大

事にしてくれました。何度かの対話の中で、いくつかの可能な研究課題を提示して戴きました。例えば、宇宙船から観測した海面の情報から津波の予測問題、地球の重力分布の推定問題、宇宙船の最適軌道修正問題、地球の自転軸の北極面での移動経路の統計的解析、などであった。これらのいずれの問題にも雑音を含む観測情報からの推定問題であり、いずれも雑音に埋もれた情報を推定するという課題で、雑音の研究が大変重要であると考えました。特にこのように時間的に連続した観測値から目的とする情報を推定するには雑音の正確な定義、さらにその性質を十分理解することが重要であった。

Kalman-Bucy Filterなどに現れる雑音は一般的に雑音の中でも最大の不確定さを持った“白色過程(white noise)”が用いられる。しかし、少なくとも工学的応用分野では、この白色過程は非常に直感的かつ非数学的な特徴付けにとどまっており、Kalman-Bucy Filterの導出においても十分納得できる証明にはなっていない[3]. このような不明確さを払拭するために、通常確率過程を一般化した“一般化確率過程”を導入することによって事態を明確にできるのではと、学位論文の研究課題として選択した。もちろん、確率微分方程式[7]の枠組みで考察すれば、数学的曖昧さなしに導出は可能である。しかし、一般化確率過程の枠組みでは白色過程は線形作用素と見なされるので、これまでの工学分野での取り扱いとは大きく異なる。

1.4.4 博士論文は「一般化確率過程とその応用」

Kalman Filterに表れる雑音は“白色過程”またはガウス特性を持つ“白色ガウス過程”である。離散時間的Kalman Filterに表れる白色過程は通常確率過程でその導出には数学的不正確さは起きない。しかし、連続時間的線形システムに表れる白色過程は通常確率過程ではないので、その導出には数学的曖昧さを避けることができない[3]. 実際、連続時間的なKalman-Bucy Filterの導出においては、“白色過程” $w(t)$ は次の性質

$$\begin{cases} E[w(t)] = 0, & -\infty < t < \infty \\ E[w(t)w(\tau)] = \sigma^2 \delta(t-\tau), & -\infty < t < \infty \end{cases}$$

を満たす雑音であると特徴付けられるのが普通である。ここに、 E は平均値、 $\sigma^2 > 0$ は雑音の大きさ、 $\delta(t)$ はデルタ関数(一般化関数または超関数)を表す。しかしこのような“白色過程”の相関関数 $K(t,s) := E[w(t)w(s)]$ はデルタ関数 $\delta(t-s)$ を含み、通常確率過程ではなく、数学的に厳密な定義が必要であることが分かる。

“白色過程”を数学的に明確に定義するために、通常関数を一般化関数(超関数)へ拡張したように、通常確率過程を一般化することが必要であることに気づきました。この課題を研究してまとめたのが、私の学位論文である[8]. この枠組みの中では、“白色過程”は(連続)線形作用素として定義され、さらに白色過程を含む

線形システムの状態方程式（微分方程式）も一般化確率微分方程式として位置づけられ、Kalman-Bucy Filterはこの枠組の内で厳密に導き出すことができることが示された [8],[10].

1.4.5 博士候補者資格試験と口頭試問

米国では一般的に博士論文を書くには、必要な授業科目と取得単位数を満たすだけでなく、最大の難関である博士候補者資格試験に合格しなければならない。多くの大学では、この資格試験は専門領域から選ばれた基本的に重要な数分野の筆記試験から構成され、これらのすべての試験に合格しなければ博士候補者にはなれない。合格できない学生は大学を去ることになります。私が属した宇宙工学科では、専門領域で指定された4分野を選び、1分野につき3時間の筆記試験を2日にわたり受験し、4分野すべてに合格しなければならなかった（さらに私が在学した当時は外国語の試験にも合格する必要があった。私はドイツ語で受験した）。

これらの試験に合格した後、準備ができた学生は3時間位の口頭試問が課せられ、これに合格して始めて博士論文を準備するための科目（dissertation course）を登録することが許され、学位論文が提出されるまで毎学期登録を続けなければならない。学位論文が提出されると、日本の大学と同じように、論文内容に近い4名以上の教授からなる論文審査委員会（dissertation committee）が構成され、3時間位の学位審査会（final defense）が開かれ、これに合格して学位の授与が決まることになる。

実は、この学位審査会の数週間前だったと思うが、Kalman Filterに関して最大の貢献をしていたスタンフォード大学の T. Kailath 教授がテキサス大学に来られ、論文審査委員会のメンバーの1人から Kailath 教授に学位論文の内容を聞いてもらうように提案がありました。審査会で発表する資料の準備はかなり整っていたので、小さな部屋で Kailath 教授に私の学位論文の内容を約1時間かけて説明しました。幸い Kailath 教授からは、新しい成果であり、とても興味ある内容であるという評価を戴き、これからの本審査会にも自信を持って説明できると安心したことを覚えています。

その後、学位審査会が開かれ、全く問題なく2時間位で修了し、直後に指導教授から合格の知らせを受けました。とても永い道のりであった。

1.4.6 確率システムシンポジウムと参加者との交流

私が始めて確率システムシンポジウムに参加したのは1972年（昭和47年）の第4回であったと記憶しています。この年の5月に米国テキサス大学で学位を取得して帰国し、その後たまたま電気学会のある委員会では早稲田大学の秋月景雄先生と同席することがあり、日本での学会活動の状況などいろいろ有益な情報をお聴きしました。5年間の米国滞在で日本の学会活動の状況に飢えていた私にとってはすべてが新鮮な情報であった。

確かその会話の中であったと思われるが、京都工芸織

維大学の砂原善文先生が中心になって、毎年開催されている“確率システムシンポジウム”という研究会があることを知りました。研究会での発表内容は私のこれまでの研究と多くの共通点があるように感じ、早速砂原先生に学位論文のコピーを謹呈したのが、このシンポジウムに参加することになったきっかけであった。実際、発表論文は投稿してなかったが、砂原先生から次回のシンポジウムに参加するように招待され、どこで開催されたか定かではないが、宿泊するホテルまで手配して戴いたように記憶をしています。このときのシンポジウムの内容は多くは記憶していないが、ただ大変活気に満ちた討論があり、特に大学院生の発表も多く、その内容の高さと真摯な態度に感銘を受けたことが印象に残っています。

初めての参加の後、何年か参加できなかった時期もあったが、その後は論文も投稿して発表させて戴き有益な議論をさせて戴いただけでなく、多くの友人ができました。実際、砂原先生の大学の院生や先生の指導を受けた研究者とは大変に難しい議論もさせて戴き、かなり緊張させられた記憶があり、また懇親会などでは防衛大学校の中溝高好先生、京都大学の片山徹先生、京都工芸繊維大学の大住晃先生、立命館大学の杉本末雄先生をはじめ多くの先生方に学問的な面だけではなく親しい友人として交流させて戴きました。

最後に、九州工業大学の熊丸耕介先生とのある会話を紹介して記録しておきたいと思います。どのような状況であったか記憶にはないが、確率測度の絶対連続に関する Radon-Nikodym Derivative という概念が話題になり、大変驚かされたことを今でも鮮明に記憶しています。この概念は関数解析や測度論などを勉強した数学を専門にする人以外はあまり話題にしない概念であると理解していたので、確率システムシンポジウムの参加者からこのような問題を話題にされたことに大変な驚きを感じたからです。私は関数解析や確率論などの講義で、たまたまこの概念を勉強してまだ忘れていなかっただけだったのですから。

1.4.7 添田喬先生とテキサス大学からの招聘

添田先生にこの場を借りてお詫びをしたいことがあります。おそらく1973年の第5回のシンポジウムに参加したおりにったと思うのですが、先生から1974年度からの徳島大学での非常勤講師の依頼を受け、暫くの考慮の後お引き受けすることになりました。どんな科目であったかなど全く記憶していませんが、東京から徳島まで毎週出講するのは困難なので、2週に1回徳島に行き2回の講義をこなすことで了解を戴いたように思います。しかし、次の年（1974年）の始めの頃だったと思うが、テキサス大学から宇宙工学科の助教授として1974年秋学期から招聘したいという手紙を戴き、2年間テキサス大学で務めることになりました。

このテキサス行きには大きな問題がありました。1972年5月に米国から帰国して東京電機大学の助教授に着

任したばかりであり、さらに徳島大学の非常勤講師の件もあり非常に難しい状況にありました。当時の私が所属する電気通信工学科の学科長からは、このような機会は滅多にないことだから、この招聘を受けることを強く進言されました。その後工学部長から呼び出しがあり、大変な叱責を受け、招聘を受けた場合のいくつかのペナルティーまで言い渡されました。このような状況を知った学科長は、この件に関しては今後“自分がすべて処理するから、お前は全く関与しないように”と言い渡され、夏休み直前の教授会で私のテキサス行きが承認されました。

結果的に徳島大学の非常勤講師の件はお断りせざるを得ない状況になりました。しかし、近づくテキサス行きの準備と私の大学での講義の引き継ぎなどで、かなり忙しい時期に添田先生には十分な説明とお詫びをさせて戴いたという記憶がなく、最近になっても大変気になっておりました。この場を借りて心からのお詫びを申し上げ、お許しを戴きたいと思えます。

1.4.8 私の確率情報システム研究への道しるべ

多くの数理科学者が私に確率情報システムへの感心を抱かせてくれた。特に大きな影響を受けた数理科学者として N. Wiener [1], C. E. Shannon [5] と R. E. Kalman [2]-[4] を挙げるができます。

Wiener からは、Wiener Process (Brownian Process) や Cybernetics などである。特に、Wiener Process の標本関数は確率 1 で連続であるが確率 1 で微分不可能であるという性質をもつ大変特異な確率過程である。Wiener Process は独立増分を持つので Stochastic Integral が定義でき、したがって確率微分方程式が議論できる。一方、一般化確率過程の枠組みでは [8],[10], Wiener Process の“微分”が白色ガウス過程であり、したがって一般化確率微分方程式が議論できる。

Shannon は、情報量、相互情報量、通信路符号化定理、通信容量などを定義・議論して、情報とは何かを数学的に明らかにしてくれました。これは情報論的に非常に大きい意義と成果をもたらしただけでなく、私には数理科学が生んだ美しい 1 つの芸術作品のようにも思われます。

Kalman からは最も大きな影響を受けたと思えます。特に、離散時間線形システムに対する Kalman Filter の成果から受けた影響は計り知れないものがある。さらに、これを連続時間線形システムの状態に拡張した Kalman-Bucy Filter は私の学位論文の課題になった一般化確率過程を研究する端緒になりました。また、多くの若い研究者にも確率システムの研究を促す大きなインセンティブを与えたと推測します。さらに、Kalman は線形システムの可制御性や可観測性を明らかにし、これらの成果を用いてすべての線形システムは「Kalman の正準型」に分解できることを示した [4]。このように整理・整頓された美しい成果は芸術作品を超えた美しさをもっていると感じます。

1.4.9 スイスに Kalman 教授を訪ねる

Kalman 教授は世界的に大変著名な数理科学者の 1 人です。1985 年には「京都賞」を、さらに 2009 年には米国のオバマ大統領から「National Medal of Science and Medal of Technology」を受賞されています。幸いに、私は 1990 年代にスイス連邦工科大学 (ETH) の Kalman 教授を 2 回訪問する機会を得ました。一度目は 1992 年に「環上の線形システムのデカップリング制御」について講演をさせてもらい、さらに当時 Kalman 教授は経済にシステム理論を応用する問題に関心を持っていた時期であったためか、私のような素人を相手に経済システムに関して黒板を使って 2 時間以上も議論をしました。このときは、筑波大学の大家尚久助手（現東京電機大学教授）も同行しており、夜は 2 人で Kalman 教授宅に招待され、Kalman 先生の親戚の家族、奥様、お嬢さんと一緒に夕食を戴いたことを今も鮮明に記憶しております。二度目の訪問の時期は定かではないが、システムに関するいろいろな問題を議論して、レストランでの夕食に招待されたこと以外の詳しい内容は記憶にない。Kalman 教授は 2016 年にこの世を去られました。親しくお付き合いをして戴いたことに感謝すると共に、ご冥福をお祈りします。

参考文献

- [1] N. Wiener: Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1949.
- [2] R. E. Kalman: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans. ASME, J. Basic Eng., vol.82, pp.35-45, 1960.
- [3] R. E. Kalman and R. S. Bucy: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Trans. ASME, J. Basic Engr., Ser. D, vol. 83, pp96-107, December 1961.
- [4] R. E. Kalman, Mathematical Description of Linear Dynamical Systems, SIAM Journal on Control, vol. 1, pp.152-192, 1963.
- [5] C. E. Shannon and W. Warren: The Mathematical Theory of Communication, The University of Illinois Press, Urbana, 1964.
- [6] 稲葉 博, 平松啓二: パターン認識における特徴評価関数と判別関数, 電気通信学会雑誌, 第 50 巻第 3 号, 453-469 頁, 1967 年.
- [7] R. S. Bucy and P. D. Joseph: Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance, Interscience Publ., New York, 1968.
- [8] H. Inaba: A theory of generalized random processes and its applications, AMRL vol.1039, Applied Mechanics Research Laboratory, University of Texas at Austin, USA. May 1971. (学位論文)
- [9] 稲葉博: 留学体験記—アメリカ・テキサス大学に 5 年間過ごして—, 電気学会雑誌, 第 92 巻第 9 号, 909 - 913

頁, 1972年.

- [10] H, Inaba and B. D. Tapley: Generalized Random Processes, A Theory and the White Gaussian Process, SIAM Journal of Control, vol. 13, no. 3, pp. 719-735, 1975.

1.5 SSSをふり返って

京都大学名誉教授 片山 徹

確率シンポジウムの50年を回顧する2018年11月の記念講演を基にした学会誌の記事を書き終えたが、それらの準備をしながら感じたこと、思い出したことなどを少し書いてみたい。

第1回1968年のシンポジウムの際は大学院博士課程の最後の時期であり、非線形システムの推定に関する学位論文をまとめていた。指導教授の樫木義一先生からは3年間で論文を提出するようにと言われており、そのことに集中していた。第1回SSSでの発表論文は1969年の雑誌「制御工学」の特集号に掲載されたものを見れば分かるが、それ以外はほとんど思い出すことがない。随分と時間が経ったと実感している。第2回SSSでは最短時間制御問題の確率版である到達確率を最大(最小)にする最適Bang-Bang制御問題について、また第3回は観測が確率的に欠損する場合の非線形フィルタリングについて発表した。

第3回目までは続けて出席したが、その後1974年の春先から1975年にかけて1年余りUCLAに滞在したことなどで、出席できないこともあった。右も左も分からないLos Angelesでは青木正直先生にずいぶんお世話になった。滞在中の1974年7月アメリカ自動制御学会ACCがTexas大学Austin校で開催され、青木先生に連れられて参加した。赤池弘次先生の正準相関解析による確率実現に関する講演に初めて出席したのがこの学会であった。後日、大学キャンパスで撮った写真を赤池先生にお送りしたことを覚えている。その後、この確率実現理論にはずいぶん苦しめられたが、それが私なりに納得して理解できるようになったのは部分空間同定法に関する研究が少し進んだ1990年代中頃であった。

第11回SSSからは京都を離れてシンポジウムが色々な場所で開催されたが、1980年の金沢工業大学でのSSS開催は、その後上野季夫先生にお願いしてデジタル画像(モナ・リザ)を作成して頂くために再訪したこともあり、非常に思い出深いものとなった。

1981年のIFAC京都世界大会ではプログラム委員として、投稿論文の処理およびプログラム編成など膨大な(PCのない時代の)作業を経験した。IFAC京都が終わってから、徐々に研究テーマをフィルタリングから実現理論、システム同定、さらには線形サーボ系の研究にシフトした。その頃から仕事が忙しくなり、SSSには

大学院生だけが出席して口頭発表して貰った場合もあった。1990年代に入ってからほぼ毎年SSSに参加できるようになり、また研究テーマはスペクトル分解、(一般化)Riccati方程式、部分空間同定法へと移っていった。

1998年京大会館での第30回SSS実行委員長を引き受けてからSSSの運営にも力を入れるようになった。この記念シンポジウムでは通常の特別講演の他に、砂原善文先生のSSSに対するご貢献を記念するための砂原記念講演Sunahara Memorial Lectureを新設することが組織委員会で決定された。信号処理分野からの人選を酒井英昭先生にお願いして、Stoica教授(Uppsala大学)とGiannakis教授(Virginia大学)を招待して、第1回の砂原記念講演を実施した。砂原記念講演は2009年まで続き、この間常連のGhosh教授(Washington大学)を始めとして、約10名の外国からの著名な研究者を招待することができた。この記念講演はSSSの国際色を出すことにはかなりの貢献をしたのではないかと考えているが、外国からの参加者を増やすということにはあまり繋がらなかったのは残念であった。

中溝高好先生に足利工業大学で開催する2001年の第33回SSSから、組織委員長を引き継いで欲しいと伝えられて、毎年緊張が続くことになった。以来、頻繁に連絡を取り合い色々とお相談した砂原賞委員会幹事の杉本末雄先生には大変お世話になった。当時気になっていたことは、英語による口頭発表を原則とするが、同時に日本語による口頭発表がまだ認められ、発表方法が中途半端な状態にあったことでした。これを早く100%英語にしたいと考えていたが、幸い2009年の第41回SSSからすべてが英語による口頭発表となった。砂原先生が1985年に提唱された件が四半世紀を経てやっと実現して、肩の荷を下すことができた。そして2011年の第43回SSSを最後に組織委員長を退任した。

私事になるが、定年後沖縄に移住した友人が計画して1964年3月学部卒業の7名による2泊3日の同窓会を2012年6月に沖縄で開催した。真夏の青空の下、首里城正殿前で記念撮影をしたことが思い出される。その翌年が琉球大学での第45回SSSであった。2年続けての沖縄訪問であり、この2013年のSSSは最も記憶に残っているものの一つです。その時の懇親会の写真は学会誌(第64巻1号, 2020年)の記事、あるいはSSSホームページの英文記事をご参照下さい。

博士課程での等価線形化法を用いた非線形フィルタリングの研究以後は上述のように線形システムの研究にはまっていた。しかし定年後、再び非線形システムの研究に携わることになった。部分空間同定法の研究が一段落した2006年頃に阿瀬 始氏と非線形システムの同定に関する共同研究を開始して、第39回および第40回SSSではWienerシステムの同定に関する論文を発表した。また第15回システム同定シンポジウムSYSID2009のためのベンチマーク問題の研究で、等価線形化法のアイ

デアを拡張して、定常ガウス過程を入力とする Wiener-Hammerstein システムの線形化に関する解析の結果を得て、2014 年の第 46 回 SSS で発表した。とくに卒業したつもりであったが、30 年の空白を経て等価線形化法に関連した問題に出会って非常に驚くと共に、最初に学生の頃手掛けた非線形問題に対する考え方が自分の中で長く尾を引いていることを感じた。2015 年は北京で開催された第 17 回 SYSID に出席したので、ハワイで開催された第 47 回 SSS は欠席した。余談ではあるが、SYSID2015 北京での日本からの論文はわれわれの 2 チャンネル Wiener システムの同定に関する論文を含めてわずかに 3 編と非常に寂しい思いをした。SYSID2018 Stockholm には出席していないが、日本からの論文は 9 編となっている。いずれにしてもわが国のこの分野の研究者がもう少し増えることを期待したい。2016 年の第 48 回 SSS からは 2 つの非線形要素をもつ非線形システムである Hammerstein-Wiener システムの開ループおよび閉ループ同定について発表してきた。この非線形システムの線形化に関しては解析的な結果が得られないので、便宜的な初期値を用いた最適化法に頼ることになり、やや不満足な結果となった。

学生時代だけでなく、何歳になってもシンポジウムでは口頭発表と討論が必要であると思う。休憩時間に頂いた短いコメントがヒントになることがあり、また自分で発表することで問題点に気づき論文を再考する必要に迫られたこともあった。今後とも SSS が発展し、研究者が集う交流の場を提供し続けることを祈念して、この思い出話を終わることにします。

1.6 SSS と共に過ごした私の研究・教育人生

九州工業大学名誉教授 熊丸耕介

確率システムシンポジウム (SSS) は、昨年 50 周年記念を迎えられ誠に同慶の至り心よりお祝い申し上げます。この度 SSS 50 周年記念に寄せて随想集を編纂されるに当たり、私への執筆依頼を頂きましたこと有り難く御礼申し上げます。

今では遠い昔の思い出を、資料も準備せず単に記憶を辿りながら書き下した回想録になりますので、いささか正確さに欠ける記述もあるかと思いますがご容赦下さい。

さて私は、大学院生から大学教官に至るまでの凡そ 40 年間、SSS と共に研究・教育人生を過ごして参りました。私の最初の講演参加は、大学院生 (博士) の時、恩師である辻節三先生に勧められ SSS の前身である「統計学的制御理論シンポジウム：京都大学楽友会館」でしたが、他の講演発表と違って著名な先生方から厳しい質問を受け大変緊張し、その後の私の研究姿勢に大きな刺激が得られたことを今でも憶えています。

SSS の特徴は、まず第一に他の学術講演会と異なり発表者に十分長い発表時間と質疑応答時間が割り当てられ

ていたことで、確か一人当たり 30 分 (発表 15 分、質疑応答 15 分) だったと思います。講演者にはあらかじめ指定された質問者 (pre-assigned discussor) が割り当てられ、講演内容について研究内容の核心を突いた的確な質問がなされました。特に継続的研究課題については、昨年とどの様な改善や発展が得られたのかなど聴衆と共に熱心な議論がなされ、多くの他大学の先生方から発表者にとって大変参考になる助言が得られました。当初はシングルセッションでしたが、一人当たりの長い講演スケジュールを組むため、その後講演発表件数が増え並列 2 セッションに編成されました。また京都郊外の山中の研修所で開催され、泊り込みで議論し合ったこともありました。私は院生時代この SSS によって鍛えられたことを有り難く思っています。SSS で発表される講演内容には、それぞれ大学の研究室によって特徴があり原稿を見ただけで著者を確かめるまでもなく何処の研究室からの発表かが判りました。私の所属する九大グループは非線形フィルタやシステム同定でしたが、京都工芸繊維大グループは確率微分方程式記述に基づく難しい推定理論の研究、広島大グループは、独特な確率密度関数の公知理論による関数展開表示と暗騒音解析へ応用など等、今でもその発表雰囲気懐かしく想い起こされます。また、秋月先生 (早稲田大) や中溝先生 (防衛大)、酒井先生 (京都大)、魚崎先生 (大阪大)、上野先生 (金沢工大)、稲葉先生 (東京電機大) などなど、指導学生に任せず自ら演壇に立って発表されていた姿が今でも臉に残っています。

次に第二の特徴は、国内の他の学術講演会に先駆けて、論文執筆と発表に英語化が取り入れられたことです。これは SSS の創設者である京都工芸繊維大学の砂原先生の将来の国際化を見据えた先見力と情熱的推進力によるもので、若い研究者にとっては英文論文作成や発表の訓練を通して、国際学会への参加発表の予備経験を得ることが出来ました。更には著名な外国研究者を招聘され、特別講演が編成されていて最新のトピックスに関する大変貴重な話題を聞くことが出来ました。これも砂原先生の豊富な人脈とご尽力の賜物と感謝しています。英文化が導入された当初は、聴衆者が日本人だけの場合はイントロのみ英語で説明し後の発表は日本語で行う例も多かった様ですが、今では発表・質疑応答全てが完全英語化になっていることでしょう。この SSS の英文化を契機に、発表論文集が一定の査読を経て Proceedings of the ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and its Applications. として刊行されることになり、私の博士課程大学院生の研究指導において、学位審査のための参考論文として他の権威ある国内外の学会誌や Proceedings と同様に利用させていただきました。この刊行に当たって、査読や諸々の発行業務に長年に亘ってご尽力いただいた砂原研究室の関係諸氏各位に改めてお礼申し上げます。

SSSの第三の特徴は、懇親会の雰囲気です。他の学術講演会と違ってSSSの懇親会では、スピーチのリレー指名が行われ、特に各大学の大学院生へマイクが渡されることも多く、彼等にとっては自己PRの良い機会が与えられ、懇親会が他に見られない新鮮な雰囲気であったことが想い起こされます。このような若手への配慮に関連して、SSSの思い出の中で私の記憶に今尚鮮明に残っていることがあります。それは、シンポジウムの休憩時間にお茶を飲みながら中溝先生が私達若手2～3名に言われたことで、「若い内は単に発表するだけではなく、他の人の講演に対して積極的に質問をすることです」、「質問をすることで、若い時に他大学の偉い先生方から君達の存在を覚えてもらい、自己PRの場として学会参加を利用すること」、「国内の学会の中で1～2つ位、できれば国際学会も1つ位、それが開催される時は必ず参加・発表するような自分の大事な学会をつくること」、「そうすれば、その学会でいずれ常連になり同世代の友人や研究仲間も得られるし、君達が将来偉くなった時や今後の研究人生に大いに役に立ちますよ」…と。私にとってこのアドバイスは大変印象的で、その後この教えを守って大変役に立ちました。私にとってこのような大事な学会の一つがSSSであり、また国際学会では3年毎に開催されるIFAC主催の国際シンポジウム(SYSID)です。特に、SYSIDでは、1979年ドイツDarmstadt開催から2003年オランダRotterdam開催まで9回(27年間)継続して参加発表し、そこで多くの外国人研究者との知己を得、1997年には相良先生(IPC委員長)や砂原先生(NOC委員長)のご尽力で日本(北九州市)でのSYSID開催が実現され、私もそのお手伝いことができました。また、私のスウェーデンUppsala大学留学が叶ったのもSYSIDで知り合ったTorsten Soderstrom教授のお世話によるものです。教授とはその後も共同研究者としてお付き合いし、私のその後の研究に深く関る大切な友人となりました。将に中溝先生のアドバイスのお陰と心から感謝しております。

SSSは、制御関連学会の中ではある意味で「確率システム」という限定された分野のシンポジウムであるため、参加者は特定の常連メンバーで占められてはいましたが、そこで育った若手研究者が各大学で教授となって大学院生を育成し、その指導を受けた若手研究者が後を引き継ぎ、硬直化することなく絶えず新しく研究者が入れ替わり発展しながら今日の50周年記念を迎えたことは本当に素晴らしいことです。このような毎年開催のシンポジウムの活性化が維持されてきたのは、杉本先生を始めとして長年SSSの企画運営に携わってこられた方々のご尽力と共に、以上紹介したSSSの特徴が大きな要因となっていると思われます。SSSの開催地は大阪・京都を主としながら、およそ隔年毎に地方でも開催されてきましたが、その世話は、創設期の先生方の教えを受けた弟子達がそれぞれ教授となって赴任した大学で行われてきまし

た。このように、SSSは将に若手研究者を育成する豊かな土壌であり、今後とも若手研究者の絶えない継承により益々発展していくことでしょう。このようなSSSを支えていく若手研究者への想いに寄せて、私の回想録を締めくくる言葉として、稚拙ながら最後に一句披露させていただきます。

「老木の落ち葉育む若木哉(ろうぼくのおちばはぐくむわかぎかな)」

有難うございました。

1.7 「確率システムシンポジウム」への思い

元大阪大学教授 魚崎勝司

「確率システムシンポジウム(SSS)」が50年の節目を迎えたこと、まことにめでたく、ご同慶に堪えない。心からお祝い申し上げたい。第1回の開催が1968年という、テーマに共通点があって、このシンポジウムの参加者も多く参加しているIFACのSymposium on System Identification and Parameter Estimation(SYSID)の第1回が1967年だったというから、僅かに1年の違いしかない。SYSIDは3年ごとの開催であるのに対し、SSSは毎年の開催で、このように息長く継続しているということは、世界的にも珍しいのではなからうか。その意味でも、SSSを立ち上げられた砂原先生(京工大)、また砂原先生の急逝後、SSSを支え続けてこられた相良先生(九州大)、秋月先生(早稲田大)、中溝先生(防衛大)、片山先生(京都大)、杉本先生(立命館大)ほかの先生方に感謝するものである。(なお、ちなみにSSSの予稿集の表紙には開催地が現在から遡って過去まで順に折り返されて記されているが、初期のSYSYFDのCFPも同じような形で開催地が順に記されていた。)

私が2018年春に、まがりなりにも50年余の有意義な大学教員生活を終えることができたのは1968年11月に京都大学楽友会館で開催された「第1回統計学的制御理論シンポジウム」に参加して以来、オーストラリア・Adelaide大学での2年間のポスドク生活の期間を除いて、2013年11月の沖縄での“45th ISICIE International Symposium on Stochastic System Theory and Its Applications”まで、毎年参加し、(晩年は聴講だけの場合もあったが)研究発表を行ってきたこのSSSで育まれた研究に対する姿勢と取り組み方、そしてシンポジウムで知己を得た多くの研究仲間のおかげであり、SSSには深い恩義を感じている。後年、陳翰馥(Han-fu Chen)教授など海外研究者を招聘したときには、佐野先生(慶應大)、片山先生、熊丸先生(九工大)、中村先生(佐賀大)、杉坂先生(大分大)、田中先生(山口大)、大住先生(京工大)などSSSで培った研究仲間のネットワークを最大限に活かさせていただいたこともありがたかった。

さて、「第1回統計学的制御理論シンポジウム」は、前年、修士課程を終え、大阪大学の助手になった私にとっ

て、まだ学会発表の経験が少ない中での発表であった。近衛通の楽友会館におっかなびっくりでおもむいた私は、知人も全くいない不安の中で、動的確率近似法関連の発表を行った。当時はシングルトラックであったため、参加者のほとんどが研究発表を聴講して討論に加わるということとなり、しかも各発表は討論を含めて 30 分が割り当てられており、十分な(あるいは十分すぎる)討論が行われるよう配慮されていたが、私自身の発表に対する討論がどのようなものであったかは、今や全く記憶にない。一方で、シングルトラックゆえに高名の先生の難しい研究発表も、とにかく聴講することで刺激を受けることができたのは幸いだった。当初隔年開催の計画だったためか、1 年おいて 1970 年に開催された第 2 回シンポジウムでは、さらにフロアからの討論を誘発するために各発表にあらかじめ討論者が指定されていた。私の発表に対しては九州大の辻先生が討論者として指定されていたが、シンポジウムの数日前に質問内容についてご丁寧な手紙をいただき、恐縮したものである。いわゆる事前質問通知であり、発表内容を深めるのに役立った。この経験から、第 3 回のシンポジウムの際、東北大学の阿部先生、竹田先生らの発表の指定討論者になっていた私も事前に質問をお送りしたことを覚えている。

当時、予稿集は手書きであり、それぞれの個性あふれた文字と文章表現は興味深いものがあった。その中でも太田先生(広島大)のグループの芸術的な活字と見まがうような予稿は印象的であった。第 5 回シンポジウムでは熊丸先生(九州大)の予稿が日本語活字を用いて書かれているが、数式はやはり手書きであった。当時日本語ワープロはまだ存在していなかったのではないかと思うから、和文タイプライターを使われたのだろうか。シンポジウムが国際化を意図して、英語に移行するとともに、予稿集もタイピングした原稿や図表を A3 のマットに貼り付けていくようになった。しかしタイピングがなかなかうまくいかず、何回も打ち直すことが必要だった。これを救ってくれたのが、当時、静岡大におられた渡辺先生からシンポジウム中にいただいた英文 TeX のソフトだった。これによって数式作成も含め、予稿の作成がずいぶん効率的に行えるようになった。それでも原稿、図表をマットに貼って、郵送する(もしくは締切日ぎりぎりに事務局へもって行く)のは変わらなかったが…。その後、インターネットの普及とともに、pdf の原稿をインターネットで直接 upload するようになり、締め切り直前まで推敲が可能となった。一方で講演発表の形式もスライドから OHP に変わり、パワーポイントが用いられるなどの進展がみられた。PC やインターネットの発展に伴い、論文作成と発表手段のアナログからデジタルへの大きな転換がなされたのが、この 50 年ということになるのだろう。

高校の学習指導要領の改訂などによって、確率は難解であるという印象から確率システムに取り組む学生の

数が減り、確率システムに関する研究が低迷した時期もあったが、SSS は経済分野などにもウイングを広げ、その危機を乗り切った。今や情報科学やデータサイエンスなど、確率や統計学に基づく思考が極めて重視される時代となっている。シングルトラック、指定討論者、合宿形式、国際化など当時としては斬新な試みを続けながら 50 回の節目を迎えた SSS ではあるが、対象とする研究分野も含め、今後どのように展開していくのか、興味深いところである。

1.8 SSS と確率システムの周辺を歩いて半世紀 京都工芸繊維大学名誉教授 大住 晃

1.8.1 確率システムと SSS との出会い

確率システムシンポジウム第 50 回と 50 周年を迎えたことに喜びを感じている。参加回数を数えてみると、初回(1968 年、昭和 43 年)以後 39 回に及ぶ、したがって参加率は $39/50 = 78\%$ 、つまり約 8 割参加したことになる。

初回のシンポジウムに参加したのは、筆者がまだ大学院修士課程の 2 回生のときであった。大学院に進学したのはよいが、学部 4 回生のときの指導教授が年半ばで他大学へ移動されたので、院 1 回生のときには指導教授はなし(今では考えられない。形ばかりの指導教授はおられたが自動制御とは無縁)。そこで、J. T. Tou の『現代制御理論』とポントリャーギンの『最適過程の数学的理論』を関数解析の知識もないままに読んでいた。1 月頃になって、京都大学から、何やら確率とかにうるさい自動制御の先生が来るらしい、とのうわさが耳に入ってきた。これはえらいことになる。筆者は確率なんてそれまで興味もなかったし、まして勉強もしていなかったから、大急ぎで研究室にあった Papoulis の“Probability, Random Variables, and Stochastic Processes”を読み始めた。そして 2 回生になった 4 月に砂原善文先生が着任されて、いよいよ同期の山下晃司君と一緒にご対面ということになった。その第一声が「君ら、これから(卒業したら)どうするんや?」だった。二人声を揃えて「はあ?、就職します」「なんや、もう勉強せえへんのか」。

それから 2、3 日経ってまた呼び出され、英語の論文(米国の博士論文)の中のひとつの数式を見せられ、「この式、わかるか?」と尋ねられた。筆者は急ごしらえで前出の本を読んでいたので、「これは… ベイズの式ですか?」「よし、それならこの論文を読んでみよう」。これが、筆者が確率システムの研究に触れた最初だった。幸運にも砂原先生の研究室の助手として大学に残ることができ、それから半世紀(以上)も確率システムの研究に携わることになった。

砂原先生のご指導のお蔭でその年(1968)の 9 月の第 7 回 SICE 学術講演会、10 月の第 11 回自動制御連合講演会と 11 月に開催された(SSS の前身である)統計学

的制御理論シンポジウムで論文発表を行うことができた。このシンポジウムは当学会（当時は日本自動制御協会, JAACE）主催の講演会で、これが第1回目であった。京都大学の榎木義一先生をトップに砂原先生が実質の運営に当られ、当初2年に1度開催することになっていた。第2回は1年おいて1970年に行われた。しかし、その重要性と人気のためそれ以後毎年開催されることになって現在に至っている。初回から第10回までは京都で開催され、筆者も実施にあたっては何かと下働きをさせてもらった。講演会を活発にするために、論文1件に1人の討論者を割り当て、それには前もって討論者を決め、論文コピーを同封して引き受けていただけるかどうかを尋ねる必要がある。当時は今日のようにインターネットのメールに論文を添付してお願いできるような状況にはなく、すべて郵送による手作業であったから、その手間ひまはいまでは考えられない。

1983年に文部省の在外研究員として米国に留学する機会を得た。その間、米国の教授からこのシンポジウムを“Sunahara Symposium”といわれたので驚いた。このシンポジウムはれっきとした学会開催のシンポジウムであるにもかかわらず個人の名称でいわれているのは、これははなはだまずいと思った。またシンポジウムでは“前刷り”と称して論文は（査読のないままに）講演時に手元にあるというスタイルであった。これは講演申込み時におけるアブストラクトの簡単な査読しかなく、学術的記録として残すにはどうかとと思っていた。筆者は1985年ストックホルムで開催された MTNS (Mathematical Theory and Network Systems) に参加したことがあり、そこでその運営方法を知った。これはいずれの学会にも所属せず、各国の研究者を中心に自主的に開催されている。この MTNS の方式、すなわち、開催実行者を全国の大学の先生方に順次バトンタッチし、また講演発表はアブストラクトのみで講演申込みを受け付け、発表後改めて論文を提出してもらって査読を経て Proceedings として出版するのがよいと考え、砂原先生に意見を具申しした。

それが聞き入れられ、これがベースとなって現在のようスタイルに変わった。シンポジウムの実行担当はその後、中溝高好 (防衛大)、秋月影雄 (早稲田大)、相良節夫 (九州大) 等の先生方を経て現在に至っている。これすべて MTNS の方式である。このことは参加者の間ではあまり知られていないので、ここで記録として残しておきたい。

砂原研究室には、その後優秀な後輩諸君、杉本末雄 (立命館大)、狩野弘之 (東京電機大)、亀島鉦二 (大阪工業大)、相原伸一 (東京理科大)、太田垣博一 (岡山理科大)、森田洋二 (京都学園大)、小島史男 (神戸大)、福田得夫 (追手門学院大)、石川昌明 (山口大) らが常連として SSS を支えてくれた。

“継続は力なり”—まさにその通り。続けることに意味

がある。“stochastic”は自然の根本であり、アインシュタインが確率的な考えは認めないといってもそれは今日では通用しない。量子力学のシュレーディンガーは

Physical laws rest on atomic statistics and are therefore only approximate.

といている。

1.8.2 筆者のストカスティック遍歴

筆者は確率システムに身をおいて半世紀が経った。その間携わった研究は以下のとおりである（カッコは研究期間）。

- A. 状態推定と制御 (1969-98)
- B. 分布定数システムの推定・パラメータ同定・制御 (1973-2001)
- C. 確率システムのモデリング (1978-82)
- D. 不規則雑音に埋もれた信号の検出・未知パラメータ推定 (1979-)
- E. 確率システムの安定性 (1981-82)
- F. 移動体の最適探索 (1984-91)
- G. 確率場の推定 (1986-93)
- H. 柔軟構造物のアクティブ制御 (1989-2007)
- I. フィルタリングと確率力学 (1995-97)
- J. 非線形システムの制御 (1995-97)
- K. 柔軟構造物のパラメータの同定 (1996-2002)
- L. 部分空間システム同定 (1997-2007)
- M. 不規則移動体のトラッキング (2000-07)
- N. 確率システムの未知パラメータ同定 (2000-03)
- O. 予測制御 (2001-03)
- P. 不規則物理データのモデリング (2004-05)
- Q. 環境問題への応用 (2005-07)
- R. 擬似観測量の同定問題への応用（逆問題解決への新アプローチ）(2006-)

この中でもとくに印象に残るのを2, 3述べておきたい。

(i) まず、L. の部分空間システム同定の研究についてである。筆者は研究当初からシステムモデルは離散時間モデルではなく、伊藤型確率微分方程式でモデル化される連続時間モデルである。それは、筆者のような凡人には離散時間モデルでは（数式の）先の見通しが立たないからである。その点連続型は微分方程式であるから数学的には見通しがよい。部分空間システム同定では、観測データからなるマトリクスを用いて代数的な入出力表現式を得なければならない。しかし連続時間モデルでは観測データの（時間）微分値が必要であることが、関連論文を読んでいてわかった。システムモデルとして白色雑音モデルを用いるとその時間微分値が必要となる。白色雑音の（何階もの）時間微分値とは一体何なのか？ それよりもそれをどのようにして求めればよいのか？ という本質的な疑問に行きあたった。そこでひらめいたの

が“超関数”の考えであった。得られた観測データ（多分微分可能ではないであろう）にテスト関数をかけてそれを（何回も）時間微分すれば、その微分は C^∞ 級のテスト関数に移るだけだ。観測データに少し工作するだけで入出力データ方程式が得られる。このアイデアで当時博士課程にいた亀山建太郎君（現福井高専准教授）に伝え、その方針で研究を進めシミュレーションを行ったところ非常にうまく行った。論文は Automatica に発表し、さらに本学会より 2001 年度学会論文賞と砂原賞を受賞した。

(ii) つぎに思い出すのは R. の擬似観測量を用いたシステムの同定である。システムモデルに未知パラメータが含まれていれば、それを一つの状態変数として、それが定数であれば $\dot{\theta}(t)=0$ として、拡大システムを組んでカルマンフィルタを用いればよい、とされていたがそれでは決して良い結果は得られないことはよく知られていた。

ある現実的な問題で、未知パラメータをどのようにすれば同定（推定）できるのかと悩んでいた院生が数式をいじくりまわして考えているのを、ある日研究室でみた。「どうした？」と尋ね、その話を聴いていたが、「それならこうすれば」とその学生の考えを引き延ばして考えついたので、擬似観測量のアイデアであった。

これは、システムモデル中の未知パラメータ θ について書き直すと、 $\theta = \{***\}$ という形になる。この右辺を取得された観測データで置き換え（近似す）れば、それを改めて $\{\text{観測データ}\} = \theta$ という形にできる。そこでカルマンフィルタを用いるために、人為的にこの右辺に観測雑音としてコンピュータで発生した雑音を加え、左辺を擬似的に観測データとみれば、これはあたかも未知パラメータ θ を観測しているかのような観測方程式になる。したがって、これにカルマンフィルタを用いれば θ が同定できることになる。実際にシミュレーションを行うとこれがうまく行ったのである。この研究も当学会の論文賞と砂原賞を受賞した (2009)。この同定法は拙著『カルマンフィルタとシステムの同定—動的逆問題へのアプローチ』（森北出版、2016）においても 1 章を割いて紹介した。

(iii) もう一つ印象に残るのは、I. の延長線上の研究である。学生時代に物理学で解析力学のハミルトン原理を習った。これはラグランジアン（作用と呼ばれる）が最小になるように自然の法則は成り立っている、ということ述べている。このことが若い頃に強く印象に残っていた。

あるとき量子力学で基礎となるシュレーディンガー方程式を確率過程から導出しようとする論文に出会った。Nelson 力学である。それにはハミルトン・ヤコビ方程式が出てくる。これは制御理論に関係があるはずだとの思いを強くした。しかし、そんな簡単に制御理論と結びつけることは不可能で諦め、それから随分と月日が過ぎ去った。本学会誌『「確率システムシンポジウム 50 回

記念」特集号』(Vol. 64, No. 1, 2020) の解説記事で述べたように、それが確率システム制御理論を用いることで導出できることがつい最近わかった。まったく自然法則は神（自然）によって支配されている、という感を強くした。ぜひ筆者の解説記事を読んでその感を共有していただきたく思う。

1.8.3 学恩に感謝!

長年にわたる SSS を通して、他大学の先生方からも知己を得、また多くの学恩を受けた。中にはすでに鬼籍に入られた先生もおられるが、とくに

砂原善文[†] (京都工芸繊維大), 榎木義一[†] (京都大), 添田喬 (徳島大), 中溝高好 (防衛大), 秋月影雄 (早稲田大), 稲葉博 (東京電機大), 小野敏郎[†] (大阪府立大), 西村敏充[†] (宇宙科学研究所), 太田光雄[†] (広島大), 片山徹 (京都大), 熊丸耕介 (九州工業大)

の諸先生方にはここに記してお礼を申し上げたい。

以上, SSS 50 回記念にあたり筆者の“確率システムの周辺”をヨチヨチ歩き時代からの話を述べた。途中研究室には有難いことに優秀な学生諸君が集まり、知恵を出して筆者の研究を助け、共に歩いてくれた。さて、トボトボながらこれからも歩けるだけ歩いてみようと思っている。

1.9 SSS の思い出

大阪府立大学名誉教授 大松 繁

SSS 開催 50 回記念の随想を書く機会を与えて頂き、有難うございました。私の博士論文および若かりし頃を振り返ることができ、大変嬉しく思っております。私は愛媛大学工学部電気工学科を 1969 年 3 月に卒業し、引き続き大阪府立大学大学院工学研究科修士課程に入学しました。大学院の「確率過程特論」の講義に伊藤清先生の Lectures on Stochastic Processes, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960 が教材として用いられました。いきなり、Borel Algebra が出てきて measurable space および probability space が出てきて、ぼんやりとした間に 15 回の講義が終了しました。内容は未消化だったのですが、測度論の概念をマスターすることが必須に思えました。そこで、数理工学科に京都大学理学部溝畑研から着任されて間もない藤江徳雄助手（故）をお願いして、Halmos (著) の measure theory (文献 [1]) を毎週 1 回の割合で 2 年がかりのゼミをして頂きました。その結果、確率過程の本が難なく読むことができるようになり、藤江徳雄先生には感謝の気持ちで一杯です。

確率シンポジウム（当時は統計学的制御理論シンポジウムで有った）には第 2 回（昭和 45 年）から 13 年間欠かさず出席し、論文発表を行ってきました。この間の思い出をいくつか述べさせていただきます。まず、連続時間確率過程では Ito 型と Stratonovich 型の 2 つのモデル化が提

案されており、状態依存型ノイズを含む確率過程の場合には、両者の差異が問題となり、その差異を定量的に評価したのが、第2回シンポジウムで私が発表した内容です。当時、砂原善文教授は雲の上の先生で質問するのが怖い存在でしたが、評価関数の最小値を求める最適制御の場合には、2つのモデルのずれを考慮すべきではないでしょうかと砂原先生に質問致しました。あまり納得して頂けなかったようでしたが、翌年に私が前述の2つのモデル化誤差による制御結果の差異を発表しました。その後、エレベータ内で砂原先生とお会いしたとき、発表が上手になりましたなど褒めて頂き、嬉しかったことが記憶に残っています。また、第2回のシンポジウムの際に、大阪大学基礎工学部坂和愛幸教授が提案された関数解析による分布系の最適制御手法を確率系に拡張し、確率分布定数系の推定問題を第3回以降のシンポジウムで発表致しました。

この結果を纏めて、Lecture Notes in Control and Information Sciences No. 11, Y. Sawaragi, T. Soeda, and S. Omatu, Springer-Verlag から出版致しました(文献 [2])。その後、榎木義一先生のお取り計らいで、伊藤清先生の還暦のお祝いのための国際シンポジウムで論文発表するように添田喬教授に依頼が有りました。添田先生から私が発表するようにと依頼されました。工学分野では砂原善文教授と添田喬教授の2人、国内の確率過程の研究者138人、海外からの研究者13名、合計151人の参加者でした(文献 [3])。周りを見渡せば、片山徹先生はじめ著名人がずらりと出席されており、穴があれば入りたい気持ちでした。案の定、発表は無茶苦茶で自分が何を話しているのか分からないパニック状態になりました。見るに見かねたのだと思いますが、砂原善文教授にHoliday-innへ昼食に誘われ、牛肉をご馳走して頂きました。拙い発表に対して、君は若いのだからこれから修行すれば良いと慰めて頂いたことが今でも脳裏に焼き付いています。

以上のような失敗談もありましたが、引き続き13年間確率システムシンポジウムで論文発表を行い、数多くの研究仲間ができました。このシンポジウムが存在しなかったなら、研究仲間もできず、寂しく研究を継続していたのではないかと思います。このような素晴らしいシンポジウムを長年企画され、発展させて頂いた立命館大学杉本末雄教授や砂原研究室の皆様およびSSSに関連した皆様にお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] Paul R. Halmos: "Measure Theory", Springer-Verlag, 1974.
- [2] Y. Sawaragi, T. Soeda, and S. Omatu: Modeling, Estimation, and Their Applications for Distributed Parameter Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [3] K. Ito: "Stochastic Differential Equation", A Wiley-

Interscience Publication, John Wiley & Sons, 1978.

1.10 第5回統計学的制御理論シンポジウムの思い出

九州大学名誉教授 和田清

第5回統計学的制御理論シンポジウムに参加したのは博士2年の時でした。相良節夫先生(九州大学工学部)の研究室に所属していましたが、先生が辻節三先生の研究室の出身であったこともあり、ゼミに参加するなど辻研究室との交流は深いものがありました。そのようなことから、私がシンポジウムに参加することとなったとき、両研究室の先輩方からとても厳しく怖いシンポジウムであり、参加するのはまだ早いのではないかと忠告を頂いたものです。しかし、砂原善文先生(京都工芸繊維大学)から相良先生に強い参加のお誘いがあり、ホテルの手配までして下さったとのことでしたので、学生の私には相良先生の参加要請を断る選択肢はなかったことはお分かり頂けるのではと思います。

私が修士課程に入った頃、両研究室の先輩方がすでに非線形KalmanFilterを精力的に研究され成果を出しておられ、今さら入り込む余地はないような状況でしたので、研究テーマをどうするかで悩んでいて、補助変数法の考え方に基づくシステム同定法の開発にテーマを定めたのは修士1年の後半でした。補助変数法は元々計量経済学の分野で開発されたものでしたので、制御工学よりも計量経済学の文献を多く読むこととなり、シンポジウムでの講演題目も、「線形離散時間システム同定のI.V.法からみた考察」で、その内容は計量経済学の影響を強く受けたものでした。なお、参加した頃は、何とか学位論文をまとめる種のようなものが見つかったかなと思われた時期でもありました。ところで、講演題目では「補助変数法」ではなく「I.V.法」としてはいますが、これはこの頃はまだ補助変数法と言う用語は定着しておらず、計量経済学での用語「操作変数法」を用いて制御の学会で批判を受けたことを反映した、ささやかな抵抗です。

古い資料を見ると、司会は鈴木胖先生(大阪大学)であらかじめ指定された討論者は竹田宏先生(東北大学)となっています。鈴木先生だったのか竹田先生だったのかそれとも他の先生からなのか覚えていないのですが、「そのような大きな行列を使って実用的な意味があるのか」「このような問題も状態依存の非線形Kalman Filter問題に帰着するのでは」とか言われたような記憶があります。先輩の忠告もあり覚悟を持って参加していたためか、それほど怖いとは感じませんでした。とは言え、2度目の参加が10年後の第15回確率システムシンポジウムだったことを考えると、心の奥底では自分にまだ早いと思ったのかも知れません。それでも、シンポジウムには参加して良かったと言う記憶が強く残っているのは、お

そらく、たとえば有本卓先生(大阪大学)の発表に対する討論者赤池弘次先生(統計数理研究所)とのやりとりを聞けたこと、また、赤池先生が「正準相関と時系列のマルコフ表現」を発表する場に立ち会えたことなどがあると思います。なお、シンポジウムの期間中に、相良先生が赤池先生と懇意だったことから、計量経済学の佐和隆光先生(京都大学経済研究所)の茶話会に参加でき、上記のマルコフ表現のより詳しい発表を聞くことができたことも良い印象につながっているのではと思います。

平成の初め頃だったと思いますが、とある方から、正準相関を使った多変数系同定法が提案されそのソフトが販売されているとの話があり、この同定法について意見を求められました。このとき、ふっとあのシンポジウムの記憶が蘇り、赤池先生の研究と関連があるのではと回答したように覚えています。ただ、そのときは、あのかのときの話しが20年近く経った今頃という印象で、その後の部分空間同定法の研究へと進展して行くとは思いませんでした。前述のように2度目の参加となった第15回確率システムシンポジウム以降は、教育担当副研究院長となり会議に追われるようになるまで、ほぼ毎年参加しましたが、研究テーマを変更しようかなと揺らぐほどの刺激を受けた第5回統計学的制御理論シンポジウムが、一番の思い出があるシンポジウムなのです。

1.11 SSSの思い出

京都大学名誉教授 酒井英昭

筆者がSSSに最初に参加したのは第7回(昭和50年11月、楽友会館)でした。時系列解析、統計的信号処理をテーマとしていましたので当時は最も身近なシンポジウムでした。京都府立ゼミナールハウスで開催された第15回るとき、ラフな服装で参加し、懇親会の際、砂原先生からシンポジウムは筆者のようなリラックスした格好で行われるのが良いといった旨のご発言があったことを記憶しております。京大会館での第30回記念シンポジウムときは実行委員長の片山先生の下でSunahara Memorial LecturerのG. Giannakis教授とP. Stoica教授の応対に当たりました。Stoica教授の講演には榎木先生もお越しになられ、懇親会の際にご感想をお聞きしたような気はするのですが、残念ながら覚えておりません。Giannakis教授は乗り継ぎのトラブルで到着が遅れ、講演時刻に間に合うかハラハラいたしましたが、ろくに睡眠もとらずに無事講演を終えました。聞けばギリシャのプロサッカーの選手だったとのことで体力抜群ということでしょう。最後に、京大会館での第40回記念シンポジウムでは実行委員長を務め、SSSへの責任を果たした思いがしました。

1.12 確率システムシンポジウム50回記念に寄せて

大阪大学 西口憲一

初めて確率システムシンポジウムに参加したのは、1983年の10月に京都府立ゼミナールハウスで3日間にわたって開催された第15回でした。確率システムシンポジウムのことを知ったのは学会誌「システムと制御」の案内ページです。当時、私は三菱電機の技術者として忙しい製造現場でシステム/ソフト設計に携わっていたのですが、若手の技術者には希望すれば社外の研修に参加できるというルールがあり、確率システムシンポジウムまでは会社として想定外だったのですが、そのルールにしたがって、許可をもらって聴講に参加いたしました。初めて参加する泊まりがけのシンポジウムで知っている人は誰もいないという状況でしたので相当緊張して出かけたのですが、会場の受け付けには、当時大阪大学におられた杉本末雄先生が座っておられて友好的に迎えていただきほっといたしました。ゼミナールハウスの宿泊に割り当てられた同室の人達には当時大分大学におられた井上勝裕先生を含め若手の人達が何人かおられて、皆確率システムの研究に熱意をもっておられて自由なお話をすることができました。すぐに仲良くなれて、日程中に聴講をさぼって皆で付近のサイクリングに出かけたりしたことも覚えています。聴講した講演は皆面白いと思いましたが、中溝高好先生がいつも会場におられて各講演に必ず質問やコメントをされていましたので、それにまた興味をかきたてられました。これに刺激を受けて自分でも何か確率システムに関する研究を行って発表しようかという意欲が湧きました。

会社には研究部門に土屋和雄さん(あと大阪大学、京都大学に移られる)がおられたので、毎週のように会社の定時後に会って、研究の指導をしていただきました。あと私も研究部門へ移ることになり、確率システムシンポジウムには1985年の第17回以降、できるだけ毎年参加して研究発表するようにいたしました。企業の技術者としての研究でしたので、テーマは、すばる望遠鏡の鏡材配置、レーダパルス列の検出、微小画像目標の検出、月面軟着陸のための障害物回避、スターセンサでの星像検出、など毎回のように異なる題材になってしまいましたが、確率システムとしてモデル化して数理的なアプローチで取り組むというやり方では一貫していたかと思います。第30回には、当時取り組んでいた大偏差理論と非線形フィルタリングに関して特別講演をさせていただいたのは良い励みになりました。

2007年には大阪大学へ移りましたが、以後ベンチャー企業との共同研究で光ファイバーの分布センシングへの数理的研究を行っています。これは光ファイバー中のブリルアン散乱光やレイリー散乱光を利用するもので、確率過程としてモデル化できる興味深い対象です。第39

回以降の確率システムシンポジウムでは光ファイバセンシングに関するテーマで研究発表を行うことができました。

振り返ってみると、研究活動のきっかけを与えていただいたのは確率システムシンポジウムですし、その後の研究内容は確率システムに関するものになり、発表の場も与えていただいたことを感謝しております。確率システムシンポジウムは50回の節目を過ぎて、今後も引き続き発展していかれることを望んでやみません。

1.13 確率システムシンポジウム — 3つの時代を超えて —

神戸大学名誉教授 小島史男

手元の記録によると、わたくしが初めてこのシンポジウムで発表したのは昭和52年11月7日から9日に開催された第9回確率システムシンポジウムである。演題は「不規則変動境界を有する確率分布定数システムの最適制御」となっている。6ページにわたる当時の予稿集は手書き原稿を印刷したものであり、昭和・平成・令和を経た今日から見ると、隔世の感がある。いかなる発表をして、どんな質問をどなたから受けたかについては、もはや記憶の彼方にあるが、この会議に3つの時代を通じて係ることになったことについては、いささか感慨深いものがある。このシンポジウムに欠かさず参加されてきた諸先生方に比べると、当方はあまりまじめな参加者ではなかった。京都工芸繊維大学の砂原研究室に在籍していた時代、アメリカから帰国して大阪工業大学、神戸大学での在職時、システム制御情報学会の運営に関わった神戸大学での後半から定年退職までの時代、この3つの時代のなかで、確率シンポジウムでの研究トレンドは変貌し、発展してきたといえる。当方が大学院生・研究生として参加させていただいたシンポジウム初期の時代は、諸先生方が秋の京都での会議を特に楽しみとされていたこともあり、近衛通りにあった旧楽友会館や、高野橋近くのホリデイイン、松ヶ崎会館など京都で開催されることが多かった。当時のシンポジウムの討議の激しさは今の比ではなかった。まだインターネットのなかった時代、講演1件につき30分が割り当てられ、その半分が討論時間、しかも2名の質問者が事前に登録されていた。発表するほうも、質問するほうも口角泡を飛ばす風情であった。現在は名誉教授になられているある高名な先生は、近衛通りを曲がって楽友会館が見えると胃が痛くなったと何かの記事で拝見したことがある。まだ学者の入り口にも達していない時代、砂原先生のおられる前で、おぎなりの質問をするわけにいかず、事前に配布された別刷りを何回も読んで質問に臨んでいた。後年教科書の執筆を手掛けた時、ある年上の共著者の先生から「あのときはじめられました。」といわれて、こちらは覚えておらず冷や汗がでたものである。砂原先生もお亡

くなりになられ、われわれの世代が研究室を運営する平成中頃になると、京都での開催はむずかしくなり、それまで常連の先生方の地元での開催が主流となっていった。砂原研究室出身の先輩後輩の先生方により、諏訪、山口、岡山などで開催され、発表のために日本各地を訪問することができた。このころになると、自ら発表する機会もだんだん遠のき、また発表風景もずいぶんおとなしくなってきたと感じた。このころからは、従来の確率過程論にもとづくシステム制御ばかりではなく、ニューラルネット・カオス・ファジィなどの複雑系、また2000年以降は統計学の先生方も参入され、会議の中身もずいぶん変わって来たように感じた。定年間際になってからも、本シンポジウムは海外開催も含めて毎年開催され、システム制御情報学会と関わる国際会議としては異例の長期間にわたるシンポジウムとなったことは、当該学術分野がいまなお発展し続けていることに他ならないと考えている。これまで長期間にわたって、本シンポジウムを支え続けられた多くの先生方に敬意を表したい。特に運営の礎を築かれた片山徹先生、Proceedingの発行や事務雑務全般を引き受けられた杉本末雄先生には、当方が学会運営をさせていただいた時に一方ならぬお世話になった。この場をお借りして深甚の謝意を表したい。本シンポジウムの前身、統計学的制御理論シンポジウムをはじめられた故榎木義一先生は、著書の中で「定常から非定常の時代」、確率システムシンポジウムに発展、国際化を進められた故砂原善文先生は「線形から非線形の時代」とおっしゃったが、さていまの確率システムシンポジウムはどこからどこへ行くこうとしているのか、皆さんのお考えをお聞きしたいこの頃である。

1.14 確率システムシンポジウム～3つの時代を超えて～

山口大学 石川昌明

確率シンポジウム(以下SSSと表記)に初めて参加したのは今から40年以上前の大学院生時代であった。当時は指名討論者制であり、難解な論文の討論者に割り当てられたときには内容を理解するのに非常に苦労した記憶がある。その後、SSSは国際会議になり、査読付プロシーディングの発刊などを経て現在のような姿に発展していった。当初、SSSは確率システムに関する専門家の学会であり、学会参加者の研究分野は比較的限られていたため、かなり専門的かつ高度な質問が多かった。しかし、確率システム理論の応用分野も格段に広がった現在は講演を聞いてもなかなか内容を理解しづらい面が生じてきた気がする。

SSSに参加し始めた頃、私は分布系における状態推定や最適制御問題などを中心に論文発表を行っていた。状態推定などでは外乱は邪魔者という立場であるが、研究の進展と共に外乱の有用性に着目することになった。具

体的には適度な強度の外乱は自己組織化・秩序化(相転移などにおいて)の促進作用, システムの安定化作用や信号の増幅作用(確率共鳴)を有することを知った. 特に, 確率分岐解析において成果を挙げられたのは大きな収穫であり, SSSのお蔭である. さらに, 現在, 感染症の数理解析に外乱の有用性を応用し, 研究を続けている.

私はオーバードクターで6年間研究生であった. その間, 塾講師などのアルバイトで学費, 生活費を捻出するという経済的, 精神的, 肉体的に厳しい生活であったが, 今思えばその6年間で研究者としての忍耐力や心構えを身に付け, 現在の研究の基礎を築くことができたと思う. この経験を基に私のような苦しい研究生活を送ることがないように若い人たちが将来に希望を持てるように指導してきたつもりである. 人生も多少(研究生6年は長過ぎた!)揺らぎがあった方が人間性が豊かになるように思う(ようにしている)今後も外乱を大事にし, 健康に留意して研究を継続していきたいと考えている.

末筆ながらSSSが今後も益々発展していくことを祈念している.

1.15 SSSで育てていただいたこと

広島工業大学 深山幸穂

SSSは講演や討論を専ら英語で行う日本発の国際会議の老舗であり, 私は英文によるプロシーディングスが発行されはじめた1993年ころから参加させていただいている. 私事で恐縮であるが, 私には学生時代に英語の授業が苦痛で, 企業勤務時代に輸出案件を命ぜられた因果を嘆き, 20代後半に急遽の代役で単身の初海外出張に死ぬ思いの緊張をした過去がある. 30代後半以降, SSSへの参加を心掛けた動機には, 確率システム論の分野で著名な先生方のご講演やご討論を身近にできる特典に加え, 公用語英語の世界で場数を踏んで国際化の時代に通用する技術者に成長したいとの思いがあった.

学生時代より研究者を目指された方々には, 世界を相手に情報の仕入れと発信を行うため, 技術英語は当然のスキルであろう. しかしながら, 不得意科目「英語」で大学を卒業し, 1970年代後半に普通の技術者として入社した私には, 普通の製造会社であっても英文の技術文書や電子メール, 国際電話等が一般化していったその後のビジネス環境の変化は悪夢に近かった.

やがて30代半ばになって「英語は避けて通れぬ」と観念し, 観光であれ, 国際会議であれ, 先ずは文法や発音を気にせず場数を踏んで「英語に慣れる」ことが重要との, 少しだけ悟った心境に至った. このころから, 確率システム論を志す尊敬する学徒の皆様のご高見に接し, 講演, 討論, 執筆と技術英語を実践するため, SSSは私にとって重要かつ手近な機会となった. 思えば以後30年間, 私はSSSに育てていただいたと存じており, 本シンポジウムを発展させてこられた関係者の皆様に心よ

り感謝しております.

1.16 私の確率システムシンポジウムとの関わり

甲南大学 田中雅博

本シンポジウムに何度参加したか覚えていませんが, 1990年前後から様子を見るために参加し, 1998年から発表してきたようで, 論文発表を伴って参加したのは十数回です. 2009年には, 実行委員長として, 神戸(甲南大学)で開催する際のお世話を担当しました. 私は, IFAC'90(Tallinn)で知り合ったRoyal Institute of Technology (Stockholm)のAlf Isaksson氏(現在はABB社所属)とずっと親交を温めていたため, この時には彼に声をかけて, Gray Box Identificationに関する特別講演をしてもらいました. Granular Computingの研究者であるNottinghamのAndrzej Bargiela教授やITS専門のEvtim Peytchev氏にも諏訪や福岡に来てもらったことがあります. このように, 本シンポジウムは外国の知り合いの先生を呼んで参加してもらうには格好の機会を提供しています.

私は, 不確実性を伴うシステムにおける推定をテーマにして研究してきました. 不確実性の扱いについては, プレ, ボケ復元のための画像処理, 本企画の解説にも書かせていただいた移動ロボット自己位置推定, 歩行者や移動ロボットなどに搭載した不安定な移動センサーの姿勢推定などに, 非線形カルマンフィルタの応用を行ってきました. これらは, 今振り返ってみますと, 確率システムの応用研究として, 本シンポジウムの枠内にぴったり収まる研究であったと思います. これらの問題は, 推定対象がボケのパラメータであったり, 移動ロボットの位置であったり, センサーの姿勢であったりと, 多くの観測データから, データの取捨選択を行いながら比較的低次元のパラメータを推定するという共通した問題を含んでおり, 長年こういうことをしていることが, それ以外のことに及んでも自分自身のものの見方の基本にもなっていることに驚きます.

私は, 確率にとどまらず, 多くの非確率ベースの手法も使ってきました. まず1つ目に, Set-Membership Approach (Unknown But Bounded Approachともいう)の理論があります. 80年代最後に, オーストリアIIASA (International Institute for Applied Systems Analysis)で, 1年半くらいの期間, Kurzhanskiというロシアから来ていたプログラムリーダーのもとでSet-membershipの枠組みの中でのシステム同定・状態推定をしていましたので, その時にこのモデルに親しむことができました. 解の確率密度関数を推定するのではなく, 解の存在可能領域を集合で表すというものです. 状態推定問題では, 状態空間モデルにおいて, 時間更新で解の存在可能範囲がぐっと広がり, 観測値を得て範囲がぐっと絞こまれるという繰り返しです. 確率モデルの場合

でも、共分散行列がその役割を果たしているのですが、このアプローチではそれが明確にわかり、非常に興味深いものでした。ただ、現実のデータではなかなかノイズの取り得る値は集合で限定できるようなものではなく、また、基本的に近似とは相性の悪いアルゴリズムですが、繰り返し計算のために楕円近似をしたりしていました。しかし、そのために次第に集合が小さくなりすぎたりする問題もあり、実際の応用可能なものは多くないと思い、次第に興味は薄れました。この当時の研究は SSS で発表するには至らず、今に至っています。

その次は、いわゆる、ソフトコンピューティングの時代に突入し、私もニューロ、遺伝的アルゴリズム、ファジィと、次々に手を伸ばし、次第に実応用が可能な感触を得てきました。本シンポジウムでも何度か発表させていただきました。しかし、これらの中でアルゴリズム自身が確率システムの応用といえるのは、乱数を明示的に用いる遺伝的アルゴリズムだけです。しかし、こういう、ソフトコンピューティングや複雑系においては、それらの性能評価はシミュレーションに頼る以外はほぼ不可能と思われ、実行結果を提示してそこで終わるということが良いのか悪いのか、なかなか難しい問題と思われまます。なお、私自身は、この流れから当然のごとく推察される通り、現在は深層学習（ディープラーニング）の応用研究に浸っています。

私の在職現役期間はあと数年しかありませんが、深層学習の研究を深めていきたいと思っています。深層学習には確率的扱いを行う部分が多数含まれますので、本シンポジウムで発表することも可能かと思っています。

SSS といえば砂原先生ですが、私自身、あまり早くからこのシンポジウムに参加していなかったこともあり、シンポジウムの場での砂原先生はほとんど記憶がありません。しかし、個人的には、砂原先生のご指導をいただいたことが今でも思い出されます。私は、岡山大学に勤務しているときに、岡山理科大学の非常勤講師を担当していた時期があります。あるとき、非常勤をしているということで、砂原先生から、お食事の接待をいただきました（太田垣先生も一緒でした）。その頃は、私もかなり若かったこともあり、砂原先生のコワオモテを思い出し、困ったことになったなあと実のところ思っていました。しかし、お会いした瞬間から、非常に打ち解けてお話される方であることを知りました。授業の仕方の話になった時に、「教科書を授業で見せて教えるようではだめだ。全部頭に入れておかなければ」と言われたことが非常に印象に残っています。その時は、そんなことは理想ではあっても無理と思いましたが、今思えば、蓋し名言です。それ以来、毎年そのことが授業のときに気になっており、最近では、とにかく教科書をほとんど見ずに授業をするようになりました。また、コペンハーゲンの SYSID に行ったときに、砂原先生とすれ違った際に、「田中君はどこに泊っている？私は、学会の開催されている

シェラトン（私の記憶違いがなければ）だ。安いよ。」と言われました。私は、それまでは、名もない安いホテルに泊まっていたのですが、その後、良いホテル（の安い部屋）に泊るようになりました。この2つだけでも、私は砂原先生から受けた教えは大きかったと感じています。

最後になりましたが、学生時代からご指導いただいた片山徹先生、勝手気ままにこのシンポジウムに関わってきたにも関わらず、いつも暖かく受け入れていただきました杉本末雄先生および諸先生方に深く感謝申し上げます。これからも、SSS の懇親会での美味しいお酒を楽しみにしています。

1.17 確率システムシンポジウム 50 回記念よせて

国土館大学 大浦邦彦

秋月影雄先生のご指導を受けながら、「閉ループ系の同定」をテーマとして大学院に在籍していた私は、博士課程 2 年生の 1994 年になってやっと SSS での発表を許可されました。それまでは「SSS での発表は無理」という秋月先生のご判断があったため、私自身は発表を契機に、博士論文に向けて弾みをつけたいと意気込んだものでした。

ただエントリーした後で冷静になってみると不安になり、どれほど過激なシンポジウムなのかと、おそろおそろ先輩の様子を聞いてみました。すると SSS の特徴として、「英語で発表する」、「事前に討論者が決まっており厳しい質問が来る」、「アットホームな学会である」などのコメントを得ました。結局、雰囲気がよく分からず手探りのまま臨んだ初回の発表では、心配した通り質問攻めで苦労した後、懇親会で著名な先生方のリラックスした姿を拝見できてお言葉を頂くなど、貴重な経験をすることができました。「アメとムチ」ではありませんが、厳しさと楽しさが両立したような SSS に魅せられ、以来 25 回続けて物怖じもせず参加してきた次第です。なお私もいま 50 歳であり、偶然 SSS とは同じ年齢になります。

がんばって（無理をして？）SSS に毎年参加していると、似たような研究をしている年齢に近い研究者と同じセッションで続けて顔を合わせることになり、研究テーマも含め親交を深めることができて助かりました。何年か続けて発表を聞いてくださった先生からは、研究の進捗について「順調に進めていて立派である」といった過大な評価を頂き、ちょっとした自信に繋がりました。また参加するだけでなく、関東で SSS が開催される時には運営側に回ることもあり、特に 1997 年（早稲田大学）は秋月先生の下で雑務全般を手伝い、2012 年（国土館大学）には僭越ながら Chair of Program & Steering Committee を拝命して、SSS の主要な先生方と連絡を取り合うなど貴重な機会を与えていただきました。これらから顧みれば、これまでの拙い私の研究は SSS に支え

てもらったと言っても過言ではないと思います。

SSS には「確率」という大きなテーマが根幹にあり、私はどちらかというと枝葉の研究を細々と行ってきただけですが、SSS に参加することで幹から栄養をもらい、守られて育ったような気がしています。今後の SSS の発展を、心より祈念いたします。

1.18 確率システムシンポジウム 50 回記念によせて

山口大学 若佐裕治

確率システムシンポジウム (SSS) の開催が 50 回を数えられたとのこと誠にありがとうございます。これまで運営に携わってこられた方のご努力の賜物であると存じます。私自身はそれほど多く参加した訳ではありませんが、いくつか印象に残ったことを述べさせていただきます。私が現在所属している山口大学に赴任したのは、2002 年ですが、その翌年の 2003 年に、山口大学工学部の所在する山口県宇部市で SSS が開催されました。赴任後としては、初めて学会関係の仕事に携わり、主に懇親会関係を担当しました。まだ不慣れで緊張もしましたが、無事に宴を終えてほっとしたことを思い出します。

その後、確率的最適化手法の収束性解析の研究を行った時期があり、何度か SSS で発表させていただきました。とくに、最初の結果を SSS で発表したことは私の中で印象に残っています。

これまで様々な開催の工夫があったと存じますが、私が参加した中では、2011 年の琵琶湖をクルージングしながらのシンポジウムは、思い切った試みで心に残るものとなりました。

参加者の中には片山徹先生の研究室関係の先輩方も多く、アットホームな雰囲気が感じられました。日本の中で確率システムを扱う研究室はある程度限定されますが、そのような縦のつながりが感じられつつも、閉鎖的ではないところが SSS の良さではないでしょうか。

SSS の益々のご発展を祈念しております。

1.19 確率システムシンポジウム 50 回記念に寄せて

鹿児島大学 西村悠樹

筆者は 2000 年代後半の博士後期課程時代から確率システム論を使ったシステム制御理論の研究をしておりますが、伝統ある確率システムシンポジウムには、記念すべき第 50 回に初めて参加させていただきました。確率システムに対する様々な視点による研究発表が一堂に会するとともに貴重なシンポジウムだと感じました。また、歴史あるシンポジウムであると同時に、筆者と同年代（アラフォー）やより若い研究者が多数参加されており、今後において益々意義深いシンポジウムになっていくと思われる。確率システム制御理論の研究者としては、とて

も心強い限りです。

筆者自身が確率システム論に興味を持った一番のポイントは、ランダムさの科学や論理としてではなく、テイラー展開の二次項が消滅せずに浮き上がってくるというところにあります。ですので、確率システムの解析では、非有界変動関数にまつわる特異な性質に面白さを見出しています。この特異さが、システム・制御・情報の各分野に今後どのような影響を与えていくのか、皆様とともに楽しみながら研究を続けたいと思います。そして、確率システムシンポジウムに相応しい内容となり次第、順次、発表させて頂きたいと考えています。末筆ながら、この度、50 周年特集号別冊にて確率システムの安定論について拙稿を掲載させて頂くことになり、幸甚に存じます。恐らくは往年の成果のご紹介に漏れが多数あるかと存じますが、読者の皆様には何卒ご容赦頂けますようお願い申し上げます。

1.20 SSS と共に 10 余年—達成と今後の展望— 名倉 剛

1.20.1 はじめに

システム制御情報学会 (ISCIE) における基幹国際会議の一つである確率システムシンポジウム (SSS) が開催 50 回を数え、確率システム理論分野においてその末席を汚しつつもここ 10 年以上にわたり SSS にて研究発表・聴講を通して当該分野における研鑽を積ませていただいた小生にとって、大変喜ばしく感じられる。以下、この伝統ある SSS と小生との関わりと今後の展望について、継続して小生を叱咤激励して下さった SSS に集う皆様への感謝の意を込めて、及ばずながら述べてみたいと思う。

1.20.2 SSS と共に 10 年以上

小生と SSS の最初の関わりは、2008 年秋まで遡る。小生は前年の 2007 年より複数ベクトル場を遷移するハイブリッドシステム研究に従事し始め、最初に取り組んだ課題は、ハイブリッドシステムにおいて最も単純なモード遷移によって特徴付けられる切替システム (switched systems) における非因果的追従問題の最適解・最適アルゴリズムを与える研究であった。幸いにもこの研究成果は、主要著名国際会議として名高い HSCC (Hybrid Systems: Computation and Control) にて論文採択され、2008 年 4 月にアメリカ・ミズーリ州 (MO)・セントルイスにて口頭発表させていただき、Springer から出版される Proceedings に収録していただく好機を得た (2))。そして、このような決定論的なハイブリッドシステムに関する研究と並行して、マルコフジャンプシステムに代表される確率的なモード遷移から成るハイブリッドシステムに関する研究成果を調査していた小生は、2008 年 11 月に京都にて離散時間マルコフジャンプシステムの最適予見追従制御に関して SSS08 で口頭発表させていただき機会を得た (3))。これが小生と SSS との最初の出会

いであると同時に、確率ハイブリッドに関する小生の査読有 (peer-reviewed) 論文としての初めての採録決定となった。その意味において、小生にとって SSS は、ここ 10 年以上にわたる小生の確率ハイブリッドシステム研究の端緒を拓いてくれた国際会議といえる。その発表セッションにおいて司会を務めて下さった武内良樹先生を初め、SSS に集う先生方の素朴で実直かつ学問に真摯なお人柄に触れ、SSS は小生にとって、自らの確率システム関連研究に関して研鑽を積むいわば道場として、積極的に自論を展開させていただく場となってきた。SSS08 発表論文は、タイアップして学術雑誌発表の場として企画して下さった IJICIC 誌にも改稿論文を掲載していただき (5)), 小生オリジナルの研究成果を海外に問う絶好の機会ともなった。以後、10 年以上にわたって、最適スムービングおよび H_∞ スムービング研究 (6), (9) 等)・マルコフジャンプシステムの非因果的追従制御系設計に関する変分アプローチ (4) 等)・最適状態と最適モード分布の同時推定等の研究成果を SSS を通じて世に問うことができ (7) 等), さらに近年は最適状態と最適モード分布の同時最適化制御に関する研究成果も部分的に発表させていただいている (10), (11) 等)。また、さらに特集論文企画として SSS とタイアップ (コラボレーション) した ISCIE 論文誌においても SSS 発表論稿を改稿した論文を掲載していただいていた (9), (12), (13), (14) 等)。小生の知り得る限り、SSS にて 10 年以上にわたり一貫して確率ハイブリッドシステムの推定と制御に関する研究成果を発表し続けたのは、小生一人であるが、言い換えれば、SSS という挑戦的な研究課題を受け入れてくれる風通しの良い国際会議があればこそ、小生は単独で独創性の高い研究発表を試み続けることが可能であったと言える。単独で時に 3 件の研究発表をさせていただいた年も複数年に渡り、それらの経験は苦しくも迷いつつも小生に独自の研究課題を歩み確実な進歩を実感する手応えを与えてくれた。これらは、システム制御理論の歴史的発展を考慮しても、「システムおよびシステム理論のハイブリッド化と大規模データの融合の潮流」に沿う研究経験であり、その意味において、とくに我が国において確率システム分野を牽引し続けた SSS の十分な意義を明確にする側面を強く意識できると信じている。

1.20.3 これからの SSS - 展望と発展 -

さて、Poisson 過程に代表されるジャンプ過程・事象の突発的変動に着目しつつこの 10 年以上 SSS にて研鑽を積み上げていただいた小生であるが、若干、最近の確率システムの新しい潮流と SSS の今後の展望について言及しておきたい。まず最初に、近年の確率システムに関する潮流として押さえておくべきは、統計物理を基礎とする機械学習の発展であろう (1))。SSS においても従来は確率微分方程式・差分方程式によるモデル化やモデルの同定等、動的モデルを意識した研究が中心を占めていたが、モデルレスで大規模データを効率的に処理すること

が可能な機械学習の発展は目覚ましいものがあり、今後、SSS は機械学習・創発システム分野の研究者ともコラボレーションを模索し、良好な関係を築きつつ革新的な確率システム構築を目指していくことが強く望まれる。また、既に SSS においてもいわゆる古典確率論のみならず量子確率論に基づく量子情報・量子システム制御に関する研究を発表される研究者の貢献も見られ (16) 等), 量子論的観点から確率システムを発展させる場として SSS が十分に活用されることも望ましいと思われる。さらに、小生の研究課題と密接な関わりを持つフォーメーション・コンセンサス等に関する研究においても、例えば、時間的あるいは事象に対する確率分布だけでなく、相空間上における確率分布という意味で空間的に確率分布を探索することによって、巨視的・俯瞰的にシステムを俯瞰する重要な鍵として確率システムの今後を模索することが強く望まれる。そして、この空間的確率分布もまた、量子論における波動方程式の概念と密接な関係を持つ (8), (15), (17), (18) 等)。微力かつ自己研鑽中の身ながら、小生も上述のような新しい確率システム研究の潮流とこれまでの確率システム研究を牽引してきた SSS の役割を先輩・同輩諸氏と共に真摯に模索していきたいと考えている。

1.20.4 おわりに

以上、述べたように、ISCIE・SSS は、確率システムにおいて特定の研究テーマのみに特化するよりもむしろ風通しの良い柔軟性に富む研究活性化を特長として、横断的にシステム研究に貢献してきた。そして、その SSS に集う学究の皆様も素朴で率直かつ学者として高潔なお人柄を備えた人物が多く、SSS は小生が主に単独で自身の研究を進展させるにあたって、心の拠り所として自身の孤独を潤してくれる貴重な場であり続けている。とくに、まず SSS において大先輩であり師といえる市川朗京都大学名誉教授静岡大学名誉教授・片山徹京都大学名誉教授・大住晃京都工芸繊維大学名誉教授には、継続して叱正と激励をいただいていた。また、杉本末雄立命館大学教授・武内良樹大阪教育大学教授には、その温かいお人柄を反映したご助言等により、常に小生の研究活動を励ましていただき、小生が研究生生活を継続する支えとなってきた。さらに、石川昌明教授・藤崎泰正教授はじめ、小生の研究と密接な関係にあるシステム制御分野において毎年のように SSS でお会いさせていただく先生方からとのディスカッションや助言は、小生の研究活動に良い刺激を与え続けてきた。拙文にて末筆ながら、これまでの SSS50 年の達成を心より祝福すると共に、今後の革新的な発展を願う次第である。

References

- 1) C. M. Bishop: Pattern Recognition and Machine Learning, Springer, 2006.
- 2) G. Nakura: Noncausal Optimal Tracking of Lin-

- ear Switched Systems, Hybrid Systems: Computation and Control, 11th International Workshop, HSCC 2008, St. Louis, MO, USA, April 2008, Proceedings, LNCS 4981, Springer (M. Egerstedt and B. Mishra (Eds.)), pp. 372-385, 2008.
- 3) G. Nakura: Stochastic Optimal Tracking with Preview for Linear Discrete-Time Markovian Jump Systems, Proceedings of the 40th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (SSS08), Kyoto, Japan, pp. 53-60, 2008.
- 4) G. Nakura: On Noncausal H^∞ Tracking Control for Linear Continuous-Time Markovian Jump Systems, Proceedings of the 41st ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (SSS09), Kobe, Japan, pp. 172-177, 2009.
- 5) G. Nakura: Stochastic Optimal Tracking with Preview by State Feedback for Linear Discrete-Time Markovian Jump Systems, International Journal of Innovative Computing, Information and Control (IJICIC), Vol. 6, No. 1, pp. 15-27, 2010.
- 6) G. Nakura: H^∞ Estimation for Linear Continuous-Time Markovian Jump Systems by Game Theoretic Approach, Proceedings of the 42nd ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (SSS10), Okayama, Japan, pp. 154-162, 2010.
- 7) G. Nakura: An Approach to Hybrid Smoothing for Linear Continuous-Time Systems with Non-Gaussian Noises, Proceedings of the 43rd ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (SSS11), Shiga, Japan, pp. 63-72, FB2-2 (CD-ROM), 2011.
- 8) G. Nakura: A Derivation Method of Wave Equations Provided by Optimal Control Systems, Proceedings of SICE Annual Conference 2013, Nagoya, Japan, pp. 2233-2238, TuBT8.5 (CD-ROM), 2013.
- 9) G. Nakura: H^∞ State Estimation for Linear Impulsive Systems with Stochastic Uncertainties, Trans. of The Institution of Systems, Control and Information Engineers, Vol. 29, No. 11, pp. 486-496, 2016.
- 10) G. Nakura: Hybrid Optimal Tracking Control by Most Probable Trajectory Approach, Proceedings of the 48th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (SSS16), Fukuoka, Japan, pp. 131-136, 2A1-2 (CD-ROM), 2016.
- 11) Gou Nakura: Hybrid Optimal Tracking Control for Linear Discrete-Time Systems by Simultaneous Optimization Approach of System States and Mode Distributions, Proceedings of the 49th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (SSS17), Hiroshima, Japan, pp. 50-55, 2017.
- 12) G. Nakura: Hybrid Optimal Tracking Control for Linear Continuous-time Systems by Simultaneous Optimization Approach of System States and Mode Distributions, Trans. of The Institution of Systems, Control and Information Engineers, Vol. 31, No. 7, pp. 257-264, 2018.
- 13) G. Nakura: H^∞ State Estimation for Linear Continuous-Time Systems Driven by Wiener and Poisson Processes-Variational Approach, Trans. of The Institution of Systems, Control and Information Engineers, Vol. 32, No. 2, pp. 47-54, 2019.
- 14) G. Nakura: Hybrid LQG Tracking Control for Linear Discrete-Time Systems by Simultaneous Optimization Approach of System States and Mode Distributions, Trans. of The Institution of Systems, Control and Information Engineers, Vol. 32, No. 10, pp. 361-369, 2019.
- 15) E. Nelson: Derivation of the Schrodinger Equation from Newtonian Mechanics, Physical Review, Vol. 150, No. 4, pp. 1079-1085, 1966.
- 16) K. Ohki: Quantum Smoother for Open Quantum Systems Driven by Quantum Jump-Diffusion Processes, Proceedings of the 50th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (SSS18), Kyoto, Japan, pp. 25-28, 2018.
- 17) A. Ohsumi: Derivation of the Schrodinger Equation in Quantum Mechanics from Stochastic Control Theory, Proceedings of the 50th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (SSS18), Kyoto, Japan, pp. 103-110, 2018.
- 18) E. Schrödinger: Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung), Annalen der Physik, Vol. 79, No. 4, pp. 361-376, 1926.

2. SSS に関連する受賞者・受賞論文名

2.1 砂原賞

1994年8月1日に急逝された砂原善文京都工芸繊維大学名誉教授の、SSS創設・研究・教育・学会活動などの多大なる業績を顕彰するため、システム制御情報学会が授与する学会賞(論文賞、奨励賞)のうち、砂原名誉教授の専門に近い分野で顕著な研究業績を挙げた研究者に対して、学会賞と並列して「砂原賞」が15年間に亘って贈呈された。

1995年度(第1回)

(奨励賞) 談議康晴: 不規則観測データ中の伝送信号の遅れ時間の最尤推定

1996年度(第2回)

(奨励賞) 佐伯徹郎: 単純化したメンバシップ関数に基づくランダム音響刺激の心理的応答予測

1997年度(第3回)

(奨励賞) 諏訪正樹: A New Relaxation-type Sampling Method for Markov Random Image Fields

1998年度(第4回)

(論文賞) 吉川恒夫, 井村順一, 春名 隆志: ハイブリッドニューラルネットワークによる非線形動的システムの同定と制御

(奨励賞) 山内浩一: Lyapunov 最急降下法の最適性とスライディングモード

1999年度(第5回)

(奨励賞) 吉岡理文: ICAを用いた信号分離手法の検討

2000年度(第6回)

(論文賞) 清田洋光, 三平満司: 時間軸状態制御形によるドリフト項をもたない非ホロノミックシステムの安定化

2001年度(第7回)

(論文賞) 大住 晃, 亀山建太郎, 山口 憲一: 超関数の概念を用いた連続時間確率システムの部分空間同定

(奨励賞) 黄 冬亮: A State-Space Model Identification of Continuous-Time Systems Operating in Closed-loop by δ -Operator Model

2002年度(第8回)

(論文賞) 井前 讓, 井上和弘: 非線形最適制御問題の数値解導出に関する統一的解法

(奨励賞) 國松禎明: 一般化リカッチ方程式とその確率的平衡実現打ち切りへの応用

2003年度(第9回)

(論文賞) 大倉和博, 川上賢一郎, 上田完次: 均質な自律ロボット群による協調行動獲得問題—機能分化に基づくアプローチ

(奨励賞) 中室 健: The Speech-Displaying System: KanNon-Applying Minimum Cross Entropy Method

2004年度(第10回)

(論文賞) 榎本隆二, 島 公脩: 配位空間上の交叉理論とその応用-II—局所交叉数と零多様体の射影次元

(奨励賞) 藤岡寛之: 力学特性を考慮した文字フォントの生成

2005年度(第11回)

(論文賞) 奥 宏史: 逐次部分空間同定を使った変化検出法

(奨励賞) 仲田勇人: 逐次データクラスタリングに基づく区分的アフィンシステムの逐次同定

(奨励賞) 武藤善之: 多周波GPS/GNSSキネマティック測位についての考察

2006年度(第12回)

(論文賞) Jaafar ALMutawa, 田中秀幸, 片山 徹: EMアルゴリズムに基づく異常値を含む線形システムの同定法
(奨励賞) 坂田智則: FRITを用いた2自由度制御系のパラメータチューニングとその応用

2007年度(第13回)

(奨励賞) 谷口忠大: 動的目標変化を含む協調タスクに対する状況弁別型強化学習機構の適用

2008年度(第14回)

(論文賞) 金子 修, 藤井隆雄: ビヘイビアアプローチに基づく離散時間最小二乗規範型推定について

(奨励賞) 田辺智子: Passive Radar Systems using Reflections of Satellites

2009年度(第15回)

(論文賞) 木村琢郎, 大住 晃, 河野通夫: 擬似観測量の導入による線形確率システムの未知外生入力 of 同定

(奨励賞) 安田和弘: Simulation on multidimensional density functions through the Malliavin-Thalmaier formula and its application to finance

2.2 Best Presentation Award**SSS'10**

Yusuke Watanabe: Collision Detection and Control of Parallel-structured Two-link Flexible Manipulators using Unscented Kalman Filter

2.3 Young Author Prize**SSS'11**

Takuya Hirotsu: Blind Deconvolution with IIR Filter by Projecting the Learning Law in FIR Approximation

SSS'12

Emmanuel Manasseh: Preamble Design for Joint Estimation of Channel, CFO and Receiver I/Q-Imbalance in OFDM Systems

SSS'13

Kirati Thoednithi: Arbitrage Opportunity on Non-linear Wealth Processes

SSS'14

Masaya Murata: Gaussian Unscented Filter

SSS'15

Osamu Fukayama: Active Noise Reduction with the Wiener Filter for Vagal Nerve Recording of a Goat with an Implanted Artificial Heart Device

SSS'16

Satoru Iwasaki: Estimation Distribution Algorithm Based on a Molecular Target Detector Model

SSS'17

Muhammad Rizwan Tariq: Design of a Continuous-Time Loop Filter for $\Delta \Sigma$ Modulators with Excess Loop Delay

Shinya Funabiki: Modified JIT-Based Solar Irradiance Prediction Methods

SSS'18
